

Tilburg University

Strategische liquiditeitsmodellen

Slangen, Piet

Publication date:
1985

Document Version
Publisher's PDF, also known as Version of record

[Link to publication in Tilburg University Research Portal](#)

Citation for published version (APA):
Slangen, P. (1985). *Strategische liquiditeitsmodellen*. [, niet verdedigd wegens overlijden auteur]. Katholieke Hogeschool.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

*Strategische
Liquiditeitsmodellen*

*door
Piet Slangen*

Katholieke
Hogeschool
Tilburg

BIBLIOTHEEK KATHOLIEKE HOGESCHOOL

Hogeschoollaan 225, Tilburg

Dit werk terug te bezorgen uiterlijk op:

25 NOV. 1985

15 MARCH 1989

10 APR. 1991

8/5 '91

BEPALING UIT HET REGLEMENT

Een werk, dat iemand in bruikleen heeft, mag door hem in geen geval worden uitgeleend.

*gische
tsmodellen*

*or
Slangen*

Katholieke
Hogeschool
Tilburg

S.Nr. 875738

Sig 280E18A

UDC 043.3:653.3

043.3:658.143

WOORD VOORAF

Op 25 september 1984 leverde Piet Slangen zijn proefschrift in bij het College van Decanen. Dit college stelde de Promotiecommissie samen en bepaalde de promotieplechtigheid op 1 februari 1985.

Op 14 oktober 1984 overleed Piet, volkomen onverwacht.

Vanaf het eerste moment waren wij, bedroefd door dit overlijden, ervan overtuigd, dat zijn boek moest worden uitgegeven, zodat het door anderen gebruikt kan worden bij theoretisch onderzoek en bij de praktische beslissingen over het kasbeheer.

Dit boek van Piet Slangen ligt voor u. Wij bieden het u aan, namens zijn vrouw Lucie en zijn kinderen Petie en Moniek. Het is voor ons een tastbare herinnering aan een goede vriend en collega.

Piet Verheyen

VOORWOORD

Hoewel er in de moderne financieringstheorie steeds meer gebruik gemaakt wordt van de econometrische en besliskundige methoden, is de aandacht die in de financiële literatuur wordt geschonken aan de toepasbaarheid van deze methoden voor het oplossen van financiële planningsproblemen beperkt gebleven. In het voor u liggende onderzoek wordt juist aandacht geschonken aan de toepasbaarheid van besliskundige methoden voor het oplossen van financiële planningsproblemen en met name voor het oplossen van het strategische liquiditeitsprobleem.

De keuze van een onderwerp voor onderzoek wordt bepaald door veel factoren. Een groot aantal hiervan is terug te voeren op de ideeën en mogelijkheden die door de directe werkomgeving worden geboden. Alle leden van de Subfaculteit der Econometrie die op enigerlei wijze een bijdrage aan dat onderzoek hebben geleverd wil ik dan ook hiervoor danken.

In het bijzonder dank ik: mijn promotor, Piet Verheyen, voor de ruimte die hij mij heeft gegeven om dit onderzoek te voltooien en de begeleiding tijdens dit onderzoek; Ruud Heuts voor zijn bereidheid de concepten te lezen en van commentaar te voorzien; Jan van Lieshout voor zijn hulp bij het oplossen van een aantal besliskundige problemen en Wally Oomens voor zijn bijdragen in de beginfase van deze studie.

Bij de programmeringswerkzaamheden heb ik veel steun gekregen van de medewerkers van het Rekencentrum. Met name van Huub Mulders.

Ook Frank van de Waterbeemd en Roger van Montfoort hebben als student-assistent een belangrijke bijdrage geleverd bij de berekeningen.

Niet alleen voor de uiteindelijke vormgeving, maar ook voor de vervaardiging van artikelen en voorlopige concepten voor dit proefschrift is veel werk verzet door de typistes van de Economische Faculteit. Vooral Annemiek Dikmans ben ik erkentelijk voor de wijze waarop zij mijn niet al te duidelijke manuscripten tot het voor u liggend resultaat heeft getransformeerd. Eenzelfde compliment gaat uit naar de tekenaars Ralph

van Delft en Jan Pijnenburg, die de zorg droegen voor de grafische illustraties.

Zijn de tot nu toe genoemde bijdragen min of meer herkenbaar in het resultaat, dit geldt minder voor de indirecte bijdragen die bepalend zijn voor de sfeer waarbinnen het werk verricht kan worden. 'Last but not least' wil ik dan ook Lucie bedanken voor haar belangrijk aandeel hierin.

P. Slangen

Tilburg, 17 september 1984

INHOUDSOPGAVE

	<u>blz.</u>
1 HET LIQUIDITEITSPROBLEEM	
1.1 Inleiding	1
1.2 Modelmatige benaderingen	3
1.3 De toepasbaarheid van de modellen	11
1.4 Strategische modellen voor het liquiditeitsprobleem	12
2 DE STRUCTUUR VAN HET OPTIMALE BELEID	
2.1 Inleiding	15
2.2 Formulering van het probleem	16
2.3 De structuur van het optimale beleid	18
2.4 Het optimale beleid bij alleen proportionele transactiekosten	23
2.5 Het optimale beleid bij vaste en proportionele transactiekosten	31
2.6 Alternatieve veronderstellingen	41
2.7 Conclusies	45
3 DE OPTIMALE BELEIDSPARAMETERS	
3.1 Inleiding	46
3.2 Te onderzoeken waarden van de probleemparameters	48
3.3 Berekening van de optimale oplossing met lineaire programmering	52
3.4 Berekening van de optimale beleidsparameters met dynamische programmering	63
3.5 Eigenschappen van de optimale beleidsparameters	69
3.6 Slotopmerkingen en conclusies	72

4 SUB-OPTIMALE BESLISSINGSREGELS VOOR HET LIQUIDITEITSPROBLEEM	
4.1 Inleiding	75
4.2 Sub-optimale beslissingsregels voor het liquiditeits- probleem	76
4.3 Berekening van de verwachte kosten per periode	77
4.4 Het evaluatiekriterium	80
5 EEN VOORRAADTHEORETISCHE BENADERING VOOR HET LIQUIDITEITSPROBLEEM	
5.1 Inleiding	84
5.2 Bepaling van de optimale transactiekas	86
5.3 Een voorraadtheoretische benadering voor het liquiditeitsbeleid; de benaderingsformules van Wagner c.s.	93
5.4 Evaluatie van de voorraadtheoretische benadering	97
6 DE LINEAIRE BESLISSINGSREGEL	
6.1 Inleiding	102
6.2 Bepaling van de optimale beleidsparameters	105
6.3 De lineaire beslissingsregels als alternatief voor de optimale strategie	113
6.4 Toepassing van de lineaire beslissingsregels bij vaste transactiekosten	118
6.5 De lineaire beslissingsregel met variabele beslissings- periode als alternatief voor de optimale strategie	125
6.6 Een "optimale" lineaire beslissingsregel	128
6.7 Evaluatie van de "optimale" lineaire beslissingsregel	130
6.8 Conclusies en slotopmerkingen	131

7	CONTINUE CONTROLE	
7.1	Inleiding	134
7.2	Het model van Miller en Orr	135
7.3	Het model van Constantinides	136
7.4	Bepaling van de optimale beleidsparameters	140
7.5	De optimale beleidsparameters bij continue controle als alternatief voor de optimale beleidsparameters bij periodieke controle	148
7.6	Conclusies	154
8	BENADERINGEN VOOR DE OPTIMALE BELEIDSPARAMETERS	
8.1	Inleiding	156
8.2	Benaderingsformules voor een verwachte kassaldo- verandering per periode groter dan nul	158
8.3	Benaderingsformules voor een verwachte kassaldo- verandering per periode kleiner dan nul	173
8.4	De invloed van asymmetrische transactiekosten	180
8.5	Evaluatie van de geconstrueerde benaderingen	187
8.6	Samenvatting en conclusies	192
	SAMENVATTING EN CONCLUSIES	197
	BIJLAGEN	
A	Partiële karakterisering van het optimale beleid	201
B	Berekening van de optimale oplossing	208
C	De proportionaliteitseigenschappen van het optimale beleid	215
D	Bepaling van de optimale transactie-omvang	216
E	Afleidingen behorende bij de lineaire beslissingsregel	219
F	Bepaling van de optimale beleidsparameters bij continue controle	227
G	Bepaling van de minimaal verwachte kosten per tijdseenheid	233
H	Eigenschappen van het deterministische probleem	240

I	Waarden van de optimale beleidsparameters	242
II	Invloed stopcriterium op de waarden van de beleids-parameters	251
III	Invloed van discretisering op de verwachte kosten per periode	252
IV	Kans op een transactie en verwachte kosten per periode bij een optimaal beleid	253
V	Resultaten met de voorraadtheoretische benadering	261
VI	Resultaten met de lineaire beslissingsregel	263
VII	Resultaten met de beleidsparameters uit het model met continue controle	266
VIII	Optimale normvoorraad en verwachte kosten per periode	270
IX	Verschillen tussen de optimale beleidsparameters	272
X	Resultaten met de geconstrueerde benaderingsformules	275
SYMBOLENLIJST		279
AANGEHAALDE LITERATUUR		284
SUMMARY		290

HOOFDSTUK I

HET LIQUIDITEITSPROBLEEM

1.1 Inleiding

Het liquiditeitsprobleem kan omschreven worden als de bepaling van de optimale verdeling in de tijd van de beschikbare liquiditeiten over de ter beschikking staande mogelijkheden, gegeven de in- en uitgaande geldstromen, de kostenparameters en de randvoorwaarden. Onder liquiditeiten verstaan we in dit verband de kredietverkrijgingsmogelijkheden, de tegoeden bij bank- en girodiensten, aanwezige contanten en belegde middelen voor zover deze zonder veel kosten op korte termijn verkocht kunnen worden. De kostenparameters worden bepaald door de opbrengsten van de belegde middelen en de tegoeden bij bank- en girodiensten, de kosten van het verkregen krediet en zowel de vaste als de variabele kosten verbonden aan transacties tussen de liquide activa.

Aan de modelmatige benadering van het zojuist geformuleerde liquiditeitsprobleem is uitgebreid aandacht geschonken in zowel de financiële als in de besliskundige literatuur. Hierbij is een grote verscheidenheid in veronderstellingen met betrekking tot de relevante grootheden gehanteerd, waardoor er een brede scala van modellen voor de beslisser beschikbaar gekomen is.

De keuze van de door de beslisser te hanteren modelformulering, gegeven een concrete probleemstelling, wordt zowel bepaald door de factoren die in de probleemstelling het meest relevant zijn, als door de oplossingsmogelijkheden welke voor een bepaald type modelformulering beschikbaar zijn. In dit verband is de door Kistner (1975) gehanteerde indeling in strategische en tactische modellen relevant.

Bij de tactische modellen voor het liquiditeitsprobleem staat het zoveel mogelijk rekening houden met de beschikbare alternatieven om middelen in de tijd te bestemmen en aan te trekken centraal. Bij de strategische modellen ligt het accent meer op het verkrijgen van algemene richtlij-

nen, waardoor de voor de afwikkeling van de betalingsverplichtingen benodigde financiële middelen tegen zo laag mogelijke kosten beschikbaar zijn.

Het verschil in uitgangspunten bij de formulering heeft tot gevolg dat er enkele verschillen tussen de modellen aan te geven zijn, welke van belang zijn bij de modelkeuze in een specifieke situatie.

Kenmerkend voor de tactische modellen is, dat bij de berekening de begintoestand expliciet in de beschouwing betrokken wordt. Uit de berekeningen volgt dan welke transacties, gegeven de begintoestand, ondernomen moeten worden om het gestelde doel te bereiken.

Kenmerkend voor de strategische modellen is, dat bij de formulering alle mogelijke toestanden die op een bepaald tijdstip kunnen optreden, in de beschouwing worden betrokken. Uit het model volgt dan bij welke toestanden er wel en bij welke toestanden er niet tot een transactie moet worden overgegaan.

Genoemde verschillen tussen beide categorieën modellen kunnen schematisch worden weergegeven zoals in tabel 1.1 voor de probleemstelling, het resultaat en het voordeel.

	TACTISCHE MODELLEN	STRATEGISCHE MODELLEN
PROBLEEMSTELLING:	Specifiek	Algemeen
RESULTAAT:	Onvoorwaardelijke richtlijn	Voorwaardelijke richtlijn
VOORDEEL:	Gebaseerd op veel informatie	Eenvoudig toepasbaar
MODELFORMULERING:	Lineaire optimalise- ring	Dynamische optimalise- ring
DOELSTELLING:	Opbrengst maximalisatie	Kostenminimalisatie

Tabel 1.1 Kenmerkende verschillen tussen tactische en strategische modellen voor het liquiditeitsprobleem

Zoals uit deze tabel blijkt zijn ook zowel de modelformulering als de doelstellingsfunctie bij beide categorieën modellen vaak verschillend.

De tactische modellen voor het liquiditeitsprobleem worden evenals de overeenkomstige modellen voor de financierings- en investeringsplanning vaak geformuleerd als een lineair optimaliseringsprobleem. De strategische modellen ter bepaling van de aan te houden kasvoorraden formuleert men daarentegen meestal als een dynamisch optimaliseringsprobleem.

In deze studie zal de meeste aandacht geschonken worden aan de strategische modellen voor het liquiditeitsprobleem. Dit gebeurt door:

1. het weergeven en evalueren van de belangrijkste resultaten uit de literatuur;
2. te onderzoeken in hoeverre de in de besliskundige literatuur bekende modellen voor overeenkomstige problemen bruikbaar zijn voor het oplossen van het strategische liquiditeitsprobleem;
3. het construeren van een eenvoudig toepasbare beslissingsregel.

Alvorens we ons tot het strategische liquiditeitsprobleem beperken, zullen we in paragraaf 1.2 een beknopt overzicht geven van de belangrijkste tactische en strategische modellen welke ter ondersteuning van de beleidsbepaling bij de liquiditeitsplanning beschikbaar zijn en in paragraaf 1.3 de toepasbaarheid van deze modellen bespreken. Bij het overzicht zal het accent liggen op de wijze waarop de relevante grootheden in het algemeen gemodelleerd worden en de daarbij behorende oplossingsmethoden. Vervolgens wordt in paragraaf 1.4 de wijze van behandeling van het strategische liquiditeitsprobleem gespecificeerd.

1.2 Modelmatige benaderingen

De meest kenmerkende factoren waardoor de verschillende modelformuleringen bepaald worden zijn de voorspelbaarheid en de structuur van de kasstromen. Dat deze per onderneming sterk verschillen blijkt bijvoorbeeld uit het onderzoek van Fisher (1973) en uit het onderzoek van Matzer en Soenen (1984).

Voor het voorspellen van toekomstige kasstromen worden in de literatuur zowel causale als formele methoden besproken. Mitchell (1967) vergelijkt een aantal causale methoden terwijl het voorspellen met behulp van formele methoden zoals tijdreeksanalyses en (dummy variabele) regressie-

technieken besproken wordt door Scott (1983).

Een probleem, dat bij het maken van voorspellingen duidelijk aanwezig is, is in hoeverre de kosten die verbonden zijn met het verzamelen van de noodzakelijke informatie opwegen tegen de voordelen die verkregen worden door de resultaten bij de beslissing te betrekken. Een goede theoretische beschouwing hierover is te vinden in Orr (1970).

Veronderstelt men bij de modellering van het liquiditeitsprobleem dat alle relevante grootheden deterministisch zijn, dan ontstaat reeds een complex model doordat een groot aantal variabelen en hun onderlinge relaties in de formulering betrokken moeten worden. Het dilemma, waarmee men reeds bij een deterministisch probleem geconfronteerd wordt, is dan ook: of het formuleren van een complex model dat uit theoretisch oogpunt een vrij algemene toepasbaarheid heeft, maar dat als te complex ervaren kan worden voor praktische toepassing of het formuleren van een model dat eenvoudig toepasbaar is, maar dat door de meer beperkende veronderstellingen minder gebruik maakt van de beschikbare mogelijkheden en/of informatie.

Veronderstelt men dat de kasstromen en/of de opbrengsten stochastische grootheden zijn, dan is een oplosbaar algemeen model niet meer mogelijk omdat de complexiteit van het model te groot wordt om tot een hanteerbare formulering te komen.

In de modellen die ontwikkeld zijn ter ondersteuning van de beleidsbepaling bij de liquiditeitsplanning worden dan ook om de hanteerbaarheid te vergroten de volgende grootheden verwaarloosd of beperkt:

- De dynamische structuur van het probleem.
- De onzekerheid m.b.t. de opbrengsten en/of de kasstromen.
- Het aantal beleggings- en/of financieringsalternatieven.
- Het aantal tijdsperiodes dat in de beschouwing betrokken wordt.

Welke factoren verwaarloosd of beperkt kunnen worden is ter bepaling van de beslisser. Hij alleen kan beoordelen welk model de beste mogelijkheden geeft om de aan hem ter beschikking staande informatie te bewerken en welke detaillering voor hem niet relevant is.

Bij de bespreking van de beschikbare modellen zullen we ons tot de meer bekende beperken en in principe een onderscheid maken tussen problemen met een deterministische en problemen met een stochastische kasstroom.

We hanteren bij de bespreking de volgende indeling:

- Het deterministische kasbeheersprobleem.
- Het stochastische kasbeheersprobleem.
- Het deterministische planningsprobleem.
- Het stochastische planningsprobleem.
- De optimale beleggingsportefeuille.

Bij de kasbeheersmodellen staat de optimale verdeling over kas en overige liquiditeiten centraal en worden de opbrengsten als deterministische grootheden beschouwd. Bij zowel de plannings- als de portefeuille-modellen wordt ook de samenstelling van de liquiditeiten in de beschouwing betrokken. Het verschil tussen de genoemde modellen is dat bij de planningsmodellen de opbrengsten van de alternatieven deterministische grootheden zijn, terwijl deze bij de portefeuille-modellen als stochastisch beschouwd worden. De portefeuille-modellen zijn met name ontwikkeld ter ondersteuning van de korte-termijn-financieringsproblematiek bij financiële instellingen zoals banken, pensioenfondsen en verzekeringsmaatschappijen. Voor deze modellen is het onderscheid tussen een deterministische en een stochastische kasstroom minder relevant.

Het deterministische kasbeheersprobleem

Bij de bespreking van de modellen die beschikbaar zijn voor het oplossen van het deterministische kasbeheersprobleem is een onderscheid tussen de modellen, waarbij een constante en een niet-constante kasstroom verondersteld wordt, relevant.

Uitgaande van een constante kasstroom is door Baumol (1952) de uit de voorraadtheorie bekende formule ter bepaling van de optimale bestelomvang op het kasbeheersprobleem toegepast. Kenmerkend voor deze benadering, waaraan vanuit een bredere invalshoek ook aandacht is geschonken door o.a. Tobin (1956) en Whalen (1968), is dat niet het beslissingsproces zelf, doch de uitkomst van dit proces centraal staat. Dit komt doordat deze modellen op de eerste plaats werden ontwikkeld om een uitspraak te kunnen doen over de waarden van de vraag- en interestelasticiiteiten. Ofschoon deze modellen niet op de eerste plaats ontworpen zijn om het beslissingsproces te sturen, wordt in de bedrijfseconomische literatuur aan deze modellen toch veel aandacht besteed. Dit omdat genoemde model-

len het liquiditeitsprobleem vaak op een eenvoudige wijze verduidelijken en ook omdat zij in bepaalde situaties goed bruikbaar zijn om het beslissingsproces te sturen.

Aan de oplossing van het deterministische kasbeheersprobleem met een niet-constante kasstroom wordt in de financiële literatuur nauwelijks aandacht geschonken. Dit is opmerkelijk omdat er in de besliskundige literatuur ook voor dit probleem effectieve oplossingsmethoden ontwikkeld zijn. Deze effectieve oplossingsmethoden, welke tot doel hebben de optimale oplossing te bepalen met een minimum aan rekenwerk en informatiebehoefte omtrent de toekomstige kasstromen en kostenparameters, bestaan uit een efficiënt voorwaarts algoritme en een effectieve stopregel.

Zowel de efficiënte voorwaartse algoritmen als de effectieve stopregels zijn afkomstig uit de produktievoorraadtheorie. Goede voorbeelden van efficiënte voorwaartse algoritmen en effectieve stopregels voor het produktievoorraadprobleem zijn te vinden in Wagner (1975). Een uitgebreid overzicht van de uit de literatuur bekende effectieve oplossingsmethoden voor het produktievoorraadprobleem, welke in een aantal gevallen ook gebruikt kunnen worden voor het deterministische kasbeheersprobleem, wordt gegeven door Morton (1981) en een overzicht van de voor het deterministische kasbeheersprobleem beschikbare effectieve oplossingsmethoden door Slangen (1984).

Het stochastische kasbeheersprobleem

Bij het stochastische kasbeheersprobleem met per periode onafhankelijk verdeelde kasstromen, staan drie beslissingsmogelijkheden centraal:

- a) vermeerdering van het kassaldo door het verkopen van korte-termijn-beleggingen
- b) vermindering van het kassaldo door het kopen van korte-termijn-beleggingen
- c) handhaving van het kassaldo.

Bij een optimale beslissing wordt alleen dan een transactie uitgevoerd als de transactiekosten kleiner zijn dan de reductie in verwachte kosten

ten gevolge van de transactie. De waarden van het kassaldo waarbij de kosten van een transactie juist gelijk zijn aan de mogelijke reductie in de verwachte kosten worden vaak de controlegrenzen genoemd. Bevindt het kassaldo zich op het beslissingsmoment binnen deze grenzen, dan is het optimaal het kassaldo te handhaven. Is het kassaldo op het beslissingsmoment buiten deze grenzen, dan is het optimaal het saldo door middel van een transactie te vermeerderen als het kleiner is dan de waarde van de onderste controlegrens en het saldo door middel van een transactie te verminderen als het groter is dan de waarde van de bovenste controlegrens. De niveaus tot waar het kassaldo door een transactie vermeerderd of verminderd wordt, noemt men vaak respectievelijk het onderste en het bovenste terugkeerpunt.

Aan het stochastische kasbeheersprobleem wordt in de literatuur aandacht geschonken zowel door de bepaling van de voorwaarden waaronder een optimaal beleid gekarakteriseerd kan worden door controlegrenzen die onafhankelijk zijn van de waarde van het kassaldo op het beslissingsmoment, als door het beschrijven van methoden voor de bepaling van de optimale waarden van de controlegrenzen.

Aan het eerstgenoemde probleem zijn de belangrijkste bijdragen geleverd door Girgis (1968), Eppen en Fama (1969), Neave (1970) en Constantinides en Richard (1978).

De bekendste bijdragen aan het tweede genoemde vraagstuk zijn gebaseerd op de uitgangspunten dat de kasstromen per tijdseenheid identiek en onafhankelijk normaal verdeeld zijn met een verwachtingswaarde gelijk aan nul en dat de controle continu plaatsvindt. Miller en Orr (1966) formuleerden, uitgaande van alleen vaste transactiekosten en een door de beslisser vooraf gespecificeerde ondergrens, een analytische uitdrukking voor zowel de bovenste controlegrens als voor het optimale kassaldo na een eventuele transactie. Constantinides (1976) formuleerde, onder bepaalde voorwaarden aan de probleemparemeters, een analytische uitdrukking voor beide controlegrenzen en de optimale kassaldo's na een eventuele transactie.

Het deterministische planningsprobleem

Voor het oplossen van het deterministische planningsprobleem is lineaire optimalisering wel de meest in de literatuur gebruikte en met toepassingen uit de praktijk geïllustreerde methode. De belangrijkste verschillen in de voorgestelde methoden hebben betrekking op de wijze van formuleren van de alternatieven, hun kenmerken en de randvoorwaarden.

De eerste algemeen bekende toepassing van lineaire programmering op het korte-termijn financieringsprobleem is beschreven door Robichek, Teichrow en Jones (1965). Zij formuleerden een financieringsmodel voor een onderneming met een typisch seizoenpatroon. Een herformulering van dit model door gebruik te maken van cumulatieve variabelen, een toepassing hiervan en de daarbij behorende implementatie werd gegeven door Mao (1968).

Staat in de beide genoemde formuleringen de financiering in enge zin centraal, Orgler (1969) formuleerde een model waarin bovendien de beleggingsmogelijkheden en de minimaal aan te houden kasvoorraad zijn opgenomen. Ook maakte hij gebruik van een ongelijke periodenstructuur, waardoor de omvang van het model gereduceerd wordt en de benodigde informatie beter aansluit bij de vaak reeds bekende informatie. Späth, Gutgesell en Grün (1972) hebben het probleem geformuleerd als een gemengd geheeltallig programmeringsprobleem.

Zowel Srinivasan (1974) als Golden, Liberatore en Lieberman (1979) formuleren het probleem zodanig dat een netwerkstructuur verkregen wordt, waardoor zij gebruik kunnen maken van efficiënte oplossingsmethoden. Is het voordeel van de gebruikte formulering boven die van de algemene lineaire programmeringsformulering dat de benodigde hoeveelheid rekenwerk minder is, hetgeen voordelen heeft voor een gevoeligheidsanalyse, het nadeel is een geringere flexibiliteit bij het opnemen van institutionele en door de beslisser gestelde randvoorwaarden.

Aan het formuleren van de doelstellingsfunctie wordt uitgebreid aandacht geschonken in de literatuur. Meestal wordt als doelstellingsfunctie gehanteerd de opbrengst van de liquide middelen gedurende het plantijdvak. Het verschil in de formulering ligt in de wijze waarop de middelen, die gedurende de periode en met name juist voor het einde van het plantijdvak beschikbaar komen, gewaardeerd worden. Glaser (1982) geeft een over-

zicht van de gebruikte doelstellingsfuncties met de daarbij behorende problematiek en toont aan dat verschil in formulering tot duidelijk verschillende beslissingen leidt.

Het stochastische planningsprobleem

Voor het oplossen van het stochastische planningsprobleem zijn lineaire programmering met stochastische randvoorwaarden en lineaire programmering onder onzekerheid wel de in de literatuur meest besproken en met voorbeelden geïllustreerde technieken. Aan de formulering van het kortetermijn-financieringsprobleem als een lineair programmeringsprobleem met stochastische randvoorwaarden wordt onder anderen aandacht geschonken door Pogue en Bussard (1972) en door Dorhout, Kriens en Van Lieshout (1977). Het voordeel van de genoemde methode is dat zowel de omvang als de structuur van het model gelijk is aan die van een equivalent deterministisch probleem, terwijl toch, onder bepaalde veronderstellingen ten aanzien van de kasstromen, rekening gehouden kan worden met het stochastische karakter van de variabelen. Het bezwaar dat men tegen de genoemde methode kan aanvoeren, is dat er slechts op een indirecte wijze rekening gehouden wordt met de mogelijkheid dat de randvoorwaarden overschreden worden, waardoor er geen verschil gemaakt wordt in de mate waarmee deze overschreden worden. Dit bezwaar is minder relevant als het beperkt houden van de overschrijdingen als een belangrijke gebruiksdoelstelling van het model gezien wordt.

Bij de als tweede genoemde methode, namelijk lineaire programmering onder onzekerheid, waarvan voorbeelden te vinden zijn in Bühler en Gehring (1978) en in Kalberg, White en Ziemba (1982), wordt het eerdergenoemde bezwaar ondervangen door expliciet rekening te houden met de consequenties van het overschrijden van de randvoorwaarden. Bij deze methoden worden beslissingen genomen die gecorrigeerd kunnen worden als de realisaties bekend zijn. In de doelstellingsfunctie worden de verwachte kosten van beide beslissingen geminimaliseerd.

Hoewel er reeds veel eerder gewezen is op de toepassingsmogelijkheid van lineaire programmering onder onzekerheid op financiële planningsproblemen [bijv. Thore (1968)], is deze methode recentelijk meer in de belangstelling gekomen doordat er algoritmen ontwikkeld zijn waardoor de beno-

digde hoeveelheid rekenwerk niet veel méér is dan die voor een equivalent deterministisch probleem. Een verwijzing naar genoemde algoritmen is te vinden bij Kalberg, White en Ziemba (1982).

Bühler en Gehring (1978) hebben de toepassingsmogelijkheden van lineaire programmering onder onzekerheid verruimd door beperkingen op te leggen aan de benodigde informatie omtrent de toekomstige kasstromen. In plaats van een exacte specificatie van de waarschijnlijkheidsverdeling behoeft de beslisser slechts een kwalitatieve uitspraak te doen als: Het is niet minder waarschijnlijk dat de realisatie van de kasstroom in een bepaalde periode in het interval I_1 ligt dan in het interval I_2 .

De besproken methoden vereisen het gebruik van een computer voor het bepalen van de optimale eerste periode beslissing. Een methode voor de bepaling van het aan te houden kassaldo en de looptijdstructuur van de beleggingen, waarmee weinig rekenwerk verbonden is, wordt gegeven door Mao en Sarndal (1978). Gebruikmakend van een beslissingsboom geven zij een eenvoudig gestructureerde oplossingsmethode voor het planningsprobleem onder risico.

De optimale beleggingsportefeuille

Aan het modelleren van liquiditeitsproblemen, waarbij ook het stochastische karakter van de opbrengsten in de beschouwing betrokken wordt, is in de literatuur onder meer aandacht geschonken door het combineren van de op het (μ, σ) -criterium gebaseerde portefeuille-selectiemethoden met transactiekosten. Chen (1977) geeft hiervan een aantal resultaten en formuleert, hiervan gebruikmakend, een lineair programmeringsmodel voor het oplossen van het portefeuille-selectieprobleem met transactiekosten en een stochastische kasstroom. Een algoritme voor het oplossen van een overeenkomstig probleem in een twee-perioden context wordt gegeven door Kalberg en Ziemba (1981).

Aan de beide genoemde artikelen ligt een vrij algemene specificatie van het probleem ten grondslag. Een meer directe bijdrage wordt gegeven door Bradley en Crane (1972). Zij hebben een model ontwikkeld ter ondersteuning van het liquiditeitsprobleem bij een bank en geven hiervan een uitgewerkt voorbeeld in Bradley, Hax en Magnanti (1977). Hoewel het door hen geformuleerde model in principe ook direct toepasbaar is op het li-

quiditeitsprobleem bij ondernemingen, wordt de praktische toepasbaarheid al snel beperkt indien een groot aantal beleggings- en financieringsmogelijkheden en meer dan twee perioden in de beschouwing betrokken worden. Daarom vermelden we tot slot van dit overzicht nog dat ook in het reeds bij het stochastische planningsprobleem genoemde artikel van Kalberg, White en Ziemba (1982) gewezen wordt op algoritmen die beschikbaar zijn voor het oplossen van liquiditeitsproblemen indien de opbrengsten stochasten zijn.

1.3 De toepasbaarheid van de modellen

De toepasbaarheid van de besproken modellen ter ondersteuning van het korte-termijn-liquiditeitsbeleid wordt in belangrijke mate bepaald door:

- De mate waarin door de modelveronderstellingen een goede beschrijving gegeven wordt van de werkelijke problematiek;
- De complexiteit van het model en de oplossingsmethode.

Een adequate afweging tussen de beide factoren kan alleen maar in een concrete situatie worden gemaakt. Wel is er in de literatuur een aantal indicatoren te vinden die het mogelijk maken om iets over de toepasbaarheid te zeggen. We denken in dit verband aan:

- a) onderzoeken waarin nagegaan is in hoeverre aan de modelveronderstellingen in een concrete situatie is voldaan;
- b) artikelen waarin verschillende modelformuleringen met elkaar worden vergeleken;
- c) evaluaties van toepassingen in de praktijk.

ad a) Voor de toepassing van het door Miller en Orr (1966) geformuleerde model en de varianten hierop zijn de kasstromen van een aantal ondernemingen onderzocht. Met name is onderzocht in hoeverre de kasstromen per periode identiek en/of onafhankelijk en/of normaal verdeeld zijn. Uit de resultaten van Miller en Orr (1967), Homonoff en Mullins (1975), Goslings (1977) en Scott (1983) blijkt dat aan een of meerdere van de genoemde veronderstellingen in voldoende mate is voldaan om de veronderstelling dat de kasstromen per periode identiek en onafhankelijk normaal verdeeld zijn te rechtvaardigen.

ad b) Het onderling vergelijken van verschillende modelformuleringen is zowel gebeurd voor gelijksoortige modellen als voor ongelijksoortige modellen. Het vergelijken van gelijksoortige modellen is het meest toegepast bij planningsmodellen. Srinivasan (1974) vergelijkt zijn resultaten met die van Orgler (1969). Kalberg, White en Ziemba (1982) gebruiken in principe hetzelfde voorbeeld als Pogue en Bussard (1972) dat weer gebaseerd is op het voorbeeld van Robichek, Teichroew en Jones (1965). Bühler en Gehring (1978) passen hun model toe op dezelfde onderneming als gedaan werd door Späth, Gutgesell en Grün (1972). De door Homonoff en Mullins (1975) gemaakte vergelijking, met cijfers uit de praktijk, tussen het model van Miller en Orr (1966) en de door hen ontwikkelde varianten daarop, is een voorbeeld van het vergelijken van overeenkomstige liquiditeitsmodellen.

Voorbeelden van vergelijkingen tussen ongelijksoortige modellen zijn te vinden bij Maldonado en Ritter (1971), Daellenbach (1974) en Scott (1983). Eerstgenoemden vergelijken het model van Baumol en varianten daarop met dat van Miller en Orr. Daellenbach (1974) vergelijkt een heuristische beslissingsregel met het model van Eppen en Fama en het model van Miller en Orr en Scott (1983) vergelijkt twee verschillende controlemodellen met een planningsmodel.

ad c) Door Orr (1970) worden twee succesvolle praktijktoepassingen met implementatie uitvoerig beschreven. Ook van planningsmodellen zijn soortgelijke resultaten bekend, echter niet in de literatuur. Indicatief in dit verband is wel dat het gebruikersvriendelijke planningsmodel van Maier en Van der Weide (1978) deel uitmaakt van de "corporate cash management service" van een belangrijke New Yorkse bank.

1.4 Strategische modellen voor het liquiditeitsprobleem

In de volgende hoofdstukken zal alleen nog aandacht geschonken worden aan strategische modellen voor het liquiditeitsprobleem. Bij het formuleren van strategische modellen voor het bepalen van het optimale liquiditeitsbeleid worden de liquide middelen meestal beperkt tot de activa kasgeld en korte-termijn-beleggingen en wordt er eveneens uitgegaan van de beschikbaarheid van een kredietfaciliteit. Voorts wordt er meestal

verondersteld, dat de controle periodiek plaatsvindt en dat de kassaldo-veranderingen per periode beschreven kunnen worden door een stochastische variabele.

Aan de oplossing van het onder de genoemde veronderstellingen geformuleerde probleem, dat in de Angelsaksische literatuur bekend staat als het "discrete stochastic cash balance problem", wordt zowel in de financiële als in de besliskundige literatuur aandacht geschonken.

Analoog aan de overeenkomstige problematiek uit de voorraadtheorie, waarbij het optimale beleid op eenvoudige wijze te beschrijven is door twee beleidsparameters, het bestelpunt en het bestelniveau, heeft in de literatuur over het liquiditeitsprobleem de vraag centraal gestaan in hoeverre het optimale liquiditeitsbeleid beschreven kan worden door vier beleidsparameters, namelijk de reeds eerder genoemde twee controlegrenzen en de erbij behorende terugkeerpunten. De resultaten hiervan worden beschreven in hoofdstuk 2.

In hoofdstuk 3 zullen de voor het bepalen van een optimaal beleid beschikbare oplossingsmethoden besproken worden. Zoals zal blijken zijn de beschikbare methoden in veel gevallen minder geschikt voor praktische toepassing door onder anderen de voor het bepalen van de optimale oplossing benodigde grote hoeveelheid rekenwerk.

Wijzigt men echter bepaalde modelveronderstellingen, dan is de oplossing vaak eenvoudiger te bepalen. De gevonden oplossing is echter niet meer optimaal voor het gestelde probleem. Daarom zullen we de door wijzigingen in de veronderstellingen verkregen beslissingsregels aanduiden als sub-optimale beslissingsregels. De keuze van de sub-optimale beslissingsregels en het te hanteren evaluatiecriterium zullen besproken worden in hoofdstuk 4. De te onderzoeken sub-optimale beslissingsregels, welke we zullen aanduiden als: de voorraadtheoretische benadering, de lineaire beslissingsregel en continue controle, worden besproken in de hoofdstukken 5, 6 en 7. Zoals zal blijken volgen hieruit vaak goede beslissingsregels voor het strategische liquiditeitsprobleem indien de probleemparameters aan bepaalde voorwaarden voldoen.

Omdat het ter beschikking staan van een eenvoudig toepasbare beslissingsregel bevorderlijk is voor de toepassing van strategische modellen

bij het liquiditeitsbeleid in de praktijk, zal in hoofdstuk 8 aangetoond worden dat het mogelijk is, gebruikmakend van de verkregen resultaten, eenvoudig toepasbare benaderingsformules te construeren die ongeveer dezelfde verwachte kosten per periode tot gevolg hebben als het optimale beleid.

Bij de bespreking en analyse van het strategische liquiditeitsprobleem zal herhaaldelijk naar de bijlagen verwezen worden. Hierin zijn de meer technische elementen opgenomen welke wij voor een volledige behandeling van het probleem van belang achten, de afleidingen van gebruikte formules, noodzakelijke bewijsvoeringen en resultaten van berekeningen voor zover deze nodig zijn ter ondersteuning van de conclusies.

Bovendien bevindt zich achter de bijlagen nog een symbolenlijst waarin die symbolen staan welke in meerdere onderdelen gebruikt worden.

HOOFDSTUK 2

DE STRUCTUUR VAN HET OPTIMALE BELEID

2.1 Inleiding

Voor de bepaling van de structuur van het optimale liquiditeitsbeleid, zullen de bij het liquiditeitsprobleem behorende veronderstellingen nader gespecificeerd moeten worden.

Bij de formulering van strategische modellen voor het bepalen van een optimaal beleid wordt in de literatuur meestal verondersteld dat de beslisser de beschikking heeft over de liquide activa kasgeld en kortetermijn-beleggingen en tevens dat hij kan beschikken over één kredietfaciliteit. Voorts dat de opbrengsten van de liquide activa en de kosten van krediet rechtevenredig zijn met het saldo op het einde van de periode, dat de kassaldoveranderingen per periode onafhankelijk verdeeld zijn en dat er zowel vaste als proportionele kosten aan een transactie verbonden zijn. Bij de modelmatige formulering van het liquiditeitsprobleem in paragraaf 2.2, zullen wij eveneens van de genoemde veronderstellingen uitgaan.

Om te onderzoeken of de optimale oplossing van het gestelde probleem op een eenvoudige wijze te karakteriseren is door vier beleidsparameters, namelijk de onderste controlegrens, het onderste terugkeerpunt, het bovenste terugkeerpunt en de bovenste controlegrens, wordt het probleem vervolgens in paragraaf 2.3 geformuleerd als een dynamisch optimaliseringsprobleem.

Bij de bepaling van de structuur van het optimale liquiditeitsbeleid zal een onderscheid gemaakt worden tussen de modellen waarbij geen en waarbij wel vaste transactiekosten verondersteld worden. Zoals zal blijken is er in het eerste geval wel, doch in het tweede geval geen expliciete uitspraak over de structuur van het optimale beleid mogelijk. Aan de structuur van het optimale beleid, indien er alleen proportionele kosten aan een transactie verbonden zijn, wordt aandacht geschonken in para-

graaf 2.4, terwijl we de structuur van het optimale beleid met vaste en proportionele transactiekosten zullen bespreken in paragraaf 2.5.

In paragraaf 2.4 en 2.5 wordt steeds uitgegaan van de in de literatuur meest gebruikte veronderstelling. Daarom zullen we in paragraaf 2.6 ook aandacht schenken aan de invloed van alternatieve veronderstellingen op de structuur van het optimale beleid en in paragraaf 2.7 de belangrijkste conclusies uit dit hoofdstuk samenvatten.

2.2 Formulering van het probleem

Voor het bepalen van de structuur van het optimale beleid gaan we er vanuit, dat de beslisser die strategie kiest waardoor de gedisconteerde verwachte kosten over het plantijdvak worden geminimaliseerd, gegeven het kassaldo aan het begin van het plantijdvak.

Dit plantijdvak, dat bestaat uit T perioden met elk een lengte van één tijdseenheid, heeft betrekking op het tijdsinterval $[0, T)$. Dit laatste wil zeggen dat het tijdstip 0 wel doch dat het tijdstip T niet tot het plantijdvak behoort. Tijdstip T noemen we de planhorizon. De t -de periode ($t = 1, 2, \dots, T$) heeft betrekking op het tijdsinterval $[t-1, t)$. Het verband tussen tijdstippen en perioden wordt grafisch weergegeven in figuur 2.1.



Figuur 2.1 Het plantijdvak

Bij de modelmatige formulering van het liquiditeitsprobleem zullen we de volgende variabelen en veronderstellingen gebruiken:

x_t : het kassaldo aan het begin van periode t ;

v_t : de transactie-omvang aan het begin van periode t ;

k_t : de exogene kassaldovermeerdering gedurende periode t .

De exogene kassaldoverandering gedurende een periode bestaat uit het verschil tussen de niet door de beslisser beïnvloedbare relevante uitgaven en inkomsten. Een positieve waarde van k_t betekent dat de uitgaven

groter zijn dan de inkomsten. De kassaldooveranderingen gedurende het plantijdvak ($t = 1, 2, \dots, T$) kunnen beschreven worden door een rij van onafhankelijk verdeelde kansvariabelen, welke gespecificeerd worden door een continue kansverdeling: $f_t(k_t)$.

Het verband tussen de beginsaldo's in twee opeenvolgende perioden is:

$$x_{t+1} = x_t + v_t - k_t \quad (2.1)$$

zodat $v_t > 0$ een kassaldovermeerdering en $v_t < 0$ een kassaldovermindering op het begintijdstip van periode t tot gevolg heeft.

Voor de bepaling van een optimaal beleid zijn twee kostensoorten van belang: de transactiekosten en de voorraadkosten. De transactiekosten, welke kunnen bestaan uit een vast en een proportioneel gedeelte, noteren we als volgt:

$$\begin{aligned} & a_1 + b_1 \cdot v_t, \text{ indien } v_t > 0; \\ T(v_t) = & 0, \quad \quad \quad \text{"} \quad v_t = 0; \\ & a_2 - b_2 \cdot v_t, \quad \quad \quad \text{"} \quad v_t < 0; \end{aligned} \quad (2.2)$$

met $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $b_1 > 0$, $b_2 > 0$.

De kosten verbonden aan het aanhouden van kasvoorraden zijn evenredig met de omvang van het saldo op het einde van de periode. Is het kassaldo positief dan kan over dit saldo een opbrengst verkregen worden. Had men dit bedrag echter belegd dan zou hier over een hogere opbrengst verkregen zijn. Het verschil in opbrengsten noemen we de kosten van het in voorraad houden. Is het kassaldo op het einde van een periode negatief, dan moet over het negatieve saldo een vergoeding betaald worden. Het verschil tussen deze vergoeding en de opbrengst indien het saldo belegd zou zijn noemen we kosten van tekort. Stel:

h: de kosten van het in voorraad houden per geldeenheid per periode;
s: de kosten van tekort per geldeenheid per periode;
dan zijn de voorraadkosten voor periode t te schrijven als:

$$V(x_t) = \begin{cases} h \cdot (x_t + v_t - k_t) & , \text{ indien } x_t + v_t - k_t \geq 0 \\ -s \cdot (x_t + v_t - k_t) & , \text{ indien } x_t + v_t - k_t < 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

met $h, s > 0$.

De doelstellingsfunctie voor het geformuleerde liquiditeitsprobleem, minimalisatie van de verwachte gediscoteerde kosten gegeven het kassaldo aan het begin van de eerste periode, $x(0)$, kan nu geschreven worden als:

$$\min_{(v_1, v_2, \dots, v_T)} E \left\{ \sum_{t=1}^T \alpha^{t-1} [T(v_t) + V(x_t)] \mid x_1 = x(0) \right\}, \quad (2.4)$$

waarin α de disconteringsfactor is waarvoor geldt: $0 < \alpha < 1$.

2.3 De structuur van het optimale beleid

Voor het minimaliseren van de verwachte gediscoteerde kosten over het plantijdvak beschikt de beslisser aan het begin van iedere periode over drie mogelijkheden. Hij kan:

- a) het kassaldo vermeerderen door verkoop van korte-termijn-beleggingen;
- b) het kassaldo verminderen door aankoop van korte-termijn-beleggingen;
- c) het kassaldo ongewijzigd laten.

Analoog aan de problematiek uit de voorraadtheorie waarin het optimale beleid per periode op een eenvoudige wijze te beschrijven is door de twee beleidsparemeters (het bestelpunt en het bestelniveau), staat in het onderzoek naar de optimaliteit van het liquiditeitsbeleid de vraag centraal of het optimale liquiditeitsbeleid beschreven kan worden door de volgende vier beleidsparemeters:

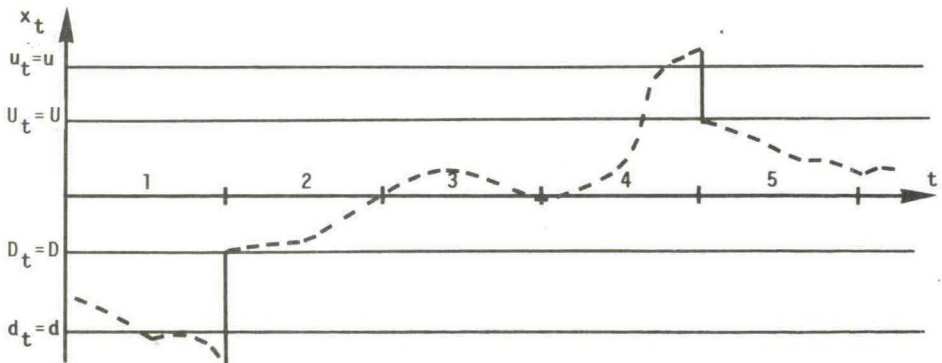
- d_t : de onderste controlegrens aan het begin van periode t ;
- D_t : het onderste terugkeerpunt aan het begin van periode t ;
- U_t : het bovenste terugkeerpunt aan het begin van periode t ;
- u_t : de bovenste controlegrens aan het begin van periode t .

Wordt een beleid volledig gekarakteriseerd door de vier gedefinieerde beleidsparameters, dan spreken we in het vervolg over een beleid met een (d_t, D_t, U_t, u_t) -structuur. Een dergelijk beleid kan, indien we de transactie-omvang aan het begin van een periode gegeven het kassaldo aan het begin van die periode noteren als $v_t(x_t)$, weergegeven worden door de volgende beslissingsregel:

$$v_t(x_t) = \begin{cases} D_t - x_t, & \text{indien } x_t < d_t ; \\ 0, & \text{" } d_t \leq x_t \leq u_t ; \\ U_t - x_t, & \text{" } x_t > u_t ; \end{cases} \quad (2.5)$$

met $d_t \leq D_t \leq U_t \leq u_t$.

Hebben de vier beleidsparameters in iedere periode dezelfde waarden, dan kan het beleid grafisch worden weergegeven als in figuur 2.2. Ter verduidelijking van de illustratie is hierin de kassaldooverandering (----) als een continue grootte getekend.



Figuur 2.2 Het beleid bij een (d_t, D_t, U_t, u_t) -structuur

Een liquiditeitsbeleid heeft dus een (d_t, D_t, U_t, u_t) -structuur indien de volgende beslissingsregel aan het begin van iedere periode gehanteerd wordt:

- Is het kassaldo aan het begin van een periode kleiner dan de waarde van de onderste controlegrens voor die periode dan wordt door verkoop van korte-termijn-beleggingen het kassaldo tot D_t vermeerderd. In het voorbeeld in figuur 2.2. wordt deze beslissing genomen aan het begin van de tweede periode.

- Bevindt het kassaldo zich aan het begin van een periode op of tussen de beide controlegrenzen dan hoeft er geen transactie tussen kas en korte-termijn-beleggingen uitgevoerd te worden. Voorbeelden hiervan zijn de kassaldo's aan het begin van de eerste, de derde en de vierde periode.

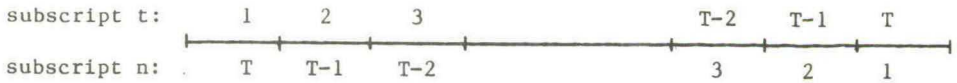
- Is het kassaldo aan het begin van een periode groter dan de waarde van de bovenste controlegrens dan moet dit saldo d.m.v. een transactie vermindert worden tot de waarde van het bovenste terugkeerpunt. Een voorbeeld waarbij het kassaldo door aankoop van korte-termijn-beleggingen vermindert wordt, is het kassaldo aan het begin van de vijfde periode in figuur 2.2.

Om te onderzoeken in hoeverre de optimale oplossing van het liquiditeitsprobleem op een eenvoudige wijze te karakteriseren is door vier beleidsparameters, zullen we het probleem formuleren als een dynamisch optimaliseringsprobleem.

Formulering als een dynamisch optimaliseringsprobleem

Bij het formuleren van het door de formules (2.1) t/m (2.5) gegeven liquiditeitsprobleem als een dynamisch optimaliseringsprobleem, maken we gebruik van het feit dat de omvang van het kassaldo op het einde van het plantijdvak voor de beslisser niet relevant is.

Ter vereenvoudiging van de notatie introduceren we daarom een subscript n ($n = 1, 2, \dots, T$) waardoor het aantal perioden vanaf het beslissingsmoment tot aan de planhorizon weergegeven wordt. Het verband tussen het subscript t , waardoor de beslissingsperiode aangegeven wordt en het subscript n , waardoor het aantal perioden vanaf het beslissingsmoment tot aan de planhorizon gegeven wordt, is getekend in figuur 2.3.



Figuur 2.3 Het verband tussen de periodensubscripts t en n

De introductie van een tweede subscript als periode-indicator heeft als consequentie dat indien er een waarde aan het subscript toegekend wordt de betekenis hiervan onduidelijk kan zijn. Daarom zullen we het toekennen van waarden aan het subscript beperken tot het subscript n .

Voor het formuleren van de recursievergelijking definiëren we:

$H_n(x_n)$: de minimaal verwachte gediscoteerde kosten van het liquiditeitsbeleid over het resterende plantijdvak, gegeven dat het saldo aan het begin van de n -de periode voor de planhorizon x_n bedraagt.

De optimale transactie-omvang aan het begin van de n -de periode voor de planhorizon, gegeven het saldo aan het begin van deze periode, is die waarde van de transactie-omvang waardoor de som van de volgende drie componenten minimaal is:

- a) de transactiekosten verbonden met een transactie van omvang v_n : $T(v_n)$;
- b) de voorraadkosten in periode n : $E\{V(x_n + v_n - k_n)\}$;
- c) de gediscoteerde waarde van de minimaal verwachte gediscoteerde kosten van het liquiditeitsbeleid over de resterende $(n-1)$ perioden gegeven het saldo aan het einde van periode n : $\alpha \cdot E\{H_{n-1}(x_n + v_n - k_n)\}$.

Het geformuleerde liquiditeitsprobleem kunnen we nu oplossen door gebruik te maken van de volgende recursievergelijking:

$$H_n(x_n) = \min_{v_n} E\{T(v_n) + V(x_n + v_n - k_n) + \alpha H_{n-1}(x_n + v_n - k_n)\} \quad (2.6)$$

voor $n = 1, 2, \dots, T$

Omdat het kassaldo op het einde van het plantijdvak wel in (2.6) kan voorkomen, maar voor de optimale strategie niet van belang is, stellen we:

$$H_0(x_1 + v_1 - k_1) \equiv 0 \quad (2.7)$$

Dit impliceert dat de waarde die we aan het begin van het plantijdvak toekennen aan een bepaald saldo op het einde van het plantijdvak onafhankelijk is van dit saldo.

Ter vereenvoudiging van de door (2.6) gegeven recursievergelijking maken we gebruik van een variabele y , waardoor het saldo nadat de transactiebeslissing aan het begin van een periode uitgevoerd is gegeven wordt. We duiden het kassaldo y in het vervolg aan als: het saldo direct na de beslissing. Bij achterwaartse nummering geldt:

$$y_n := x_n + v_n \quad (2.8)$$

Bovendien definiëren we een functie $L(y)$ waardoor de verwachte voorraadkosten in de beslissingsperiode, als functie van het saldo direct na de beslissing, weergegeven wordt. Bij achterwaartse nummering geldt:

$$L(y_n) := E\{V(x_n + v_n - k_n)\} \quad (2.9)$$

Gebruikmakend van (2.8) en (2.9) kan (2.6) herschreven worden als:

$$H_n(x_n) = \min_{y_n} [T(y_n - x_n) + L(y_n) + \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} H_{n-1}(y_n - k_n) \cdot f(k_n) dk_n] \quad (2.10)$$

Bij het onderzoek naar de structuur van het optimale beleid zullen we een onderscheid maken tussen de modellen waarbij geen en de modellen waarbij wel vaste transactiekosten verondersteld worden. Zoals zal blijken is er in het eerste geval wel, doch in het tweede geval geen eenduidige uitspraak over de structuur van het optimale beleid mogelijk.

2.4 Het optimale beleid bij alleen proportionele transactiekosten

Zijn er alleen proportionele kosten met een transactie tussen de liquide activa verbonden dan vallen bij een optimaal beleid, zoals in deze paragraaf zal worden aangetoond, de controlegrenzen met de daarbij behorende terugkeerpunten samen. In dat geval spreken we van een (D_t, U_t) -beleid en functioneren de terugkeerpunten dus tevens als controlegrenzen.

We zullen in deze paragraaf de structuur van het optimale beleid achtereenvolgens bepalen voor de laatste periode, de daaraan voorafgaande perioden en voor de eerste periode indien het aantal perioden waaruit het plantijdvak bestaat naar oneindig gaat. Omdat in het eerstgenoemde geval de beslissing slechts voor een periode behoeft te worden genomen, noemen we dit het een-periodeprobleem.

Het één-periodeprobleem

De minimaal verwachte kosten in de laatste periode zijn, gegeven het saldo aan het begin van die periode, gelijk aan:

$$H_1(x_1) = \min_{y_1} [T(y_1 - x_1) + L(y_1)]. \quad (2.11)$$

Omdat we in deze paragraaf veronderstellen dat er geen vaste kosten met een transactie verbonden zijn ($a_1 = a_2 = 0$), kan de doelstellingsfunctie voor de laatste periode ook geschreven worden als:

$$H_1(x_1) = \min_{y_1 > x_1} [b_1 \cdot (y_1 - x_1) + L(y_1)] , \quad (2.12)$$

$$\min_{y_1 < x_1} [b_2 \cdot (x_1 - y_1) + L(y_1)] .$$

In deze formulering zijn duidelijk de drie beschikbare mogelijkheden te herkennen, namelijk het kassaldo door een transactie vermeerderen ($y_1 > x_1$), het kassaldo ongewijzigd laten ($y_1 = x_1$) en het kassaldo door een

transactie verminderen ($y_1 < x_1$).

In het hierna volgende geven we een afleiding van de regelgrenzen voor willekeurige waarden van x_1 , zodat de minimalisaties onvoorwaardelijk plaatsvinden. Het saldo waarvoor de som van de transactiekosten van een kassaldovermeerdering plus de verwachte voorraadkosten ten gevolge van die vermeerdering minimaal is noemen we D_1 , het onderste terugkeerpunt, en het punt, waarin de som van de transactiekosten van een kassaldovermindering plus de verwachte voorraadkosten ten gevolge van die vermindering minimaal is U_1 , het bovenste terugkeerpunt. We noteren dit als:

$$b_1 \cdot (D_1 - x_1) + L(D_1) = \min_{y_1} [b_1 \cdot (y_1 - x_1) + L(y_1)]$$

$$b_2 \cdot (x_1 - U_1) + L(U_1) = \min_{y_1} [b_2 \cdot (x_1 - y_1) + L(y_1)]$$

Voor de verdere uitwerking van dit probleem zijn de marginaal verwachte voorraadkosten van belang. Uit (2.3) en (2.9) volgt dat de verwachte voorraadkosten per periode gelijk zijn aan:

$$L(y) = h \cdot \int_{-\infty}^y (y-k) \cdot f(k) dk - s \cdot \int_y^{\infty} (y-k) \cdot f(k) dk \quad (2.13)$$

Hieruit zijn, door gebruik te maken van de regel van Leibniz, de marginaal verwachte voorraadkosten te bepalen als:

$$L'(y) := \frac{dL(y)}{dy} = (h+s) \cdot F(y) - s, \quad (2.14)$$

met

$$F(y) := \int_{-\infty}^y f(k) dk.$$

Omdat $F(y)$ een niet dalende functie van y is, volgt uit (2.14) dat de marginaal verwachte voorraadkosten een niet dalende functie zijn van het saldo direct na de beslissing. Bovendien volgt uit (2.14)

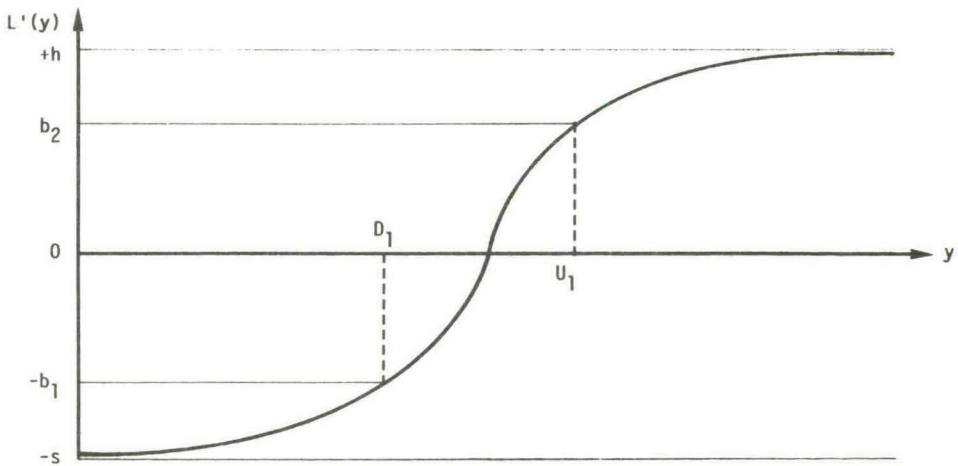
$$\lim_{y \rightarrow -\infty} L'(y) = -s \quad \text{en} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} L'(y) = h \quad (2.15)$$

d.w.z. dat de marginaal verwachte voorraadkosten per periode, indien de voorraad na de beslissing tot $+\infty$ of $-\infty$ nadert, gelijk zijn aan respectievelijk de kosten van het in voorraad houden en die van tekort.

Uit de eigenschappen (2.14) en (2.15) van de marginaal verwachte voorraadkostenfunctie volgt dat de waarden van y , waarvoor de relevante marginale transactiekosten juist gelijk zijn aan de marginaal verwachte voorraadkosten, eenduidig te bepalen zijn uit:

$$\begin{aligned} L'(y) &= -b_1, \text{ indien } b_1 < s; \\ L'(y) &= b_2, \text{ indien } b_2 < h. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Dit wordt grafisch weergegeven in figuur 2.4.



Figuur 2.4 De bepaling van de optimale terugkeerpunten

Omdat door (2.16) de optimale terugkeerpunten bepaald worden indien aan de hierbij genoemde voorwaarden voldaan wordt, volgt hieruit:

$$D_1 = L^{-1}(-b_1) , \text{ indien } b_1 < s ; \quad (2.17)$$

$$U_1 = L^{-1}(b_2) , \text{ indien } b_2 < h . \quad (2.18)$$

Hieruit volgt dat $D_1 \leq U_1$ en dat de terugkeerpunten alleen samen vallen als er geen proportionele transactiekosten zijn. Indien de proportionele transactiekosten niet kleiner zijn dan de relevante voorraadkosten, dan geldt dat er geen optimaal terugkeerpunt (of D_1 en/of U_1) en dus ook geen optimaal controlepunt (of d_1 en/of u_1) bestaat. Teneinde dit op eenvoudige wijze in de hierna volgende tekst op te kunnen nemen geven we dit aan door

$$D_1 = -\infty , \text{ indien } s \leq b_1 ; \quad (2.19)$$

$$U_1 = +\infty , \text{ indien } h \leq b_2 . \quad (2.20)$$

De optimale beslissingsregel voor de laatste periode, welke we weergeven door $v(x_1)$, is nu uit (2.12), door gebruik te maken van $v_1 = y_1 \overline{x}_1$, te bepalen als:

$$\begin{aligned} D_1 - x_1 , & \text{ indien } x_1 < D_1 ; \\ v(x_1) = & 0 , \quad " \quad D_1 \leq x_1 \leq U_1 ; \\ U_1 - x_1 , & \quad " \quad x_1 > U_1 ; \end{aligned} \quad (2.21)$$

met D_1 gegeven door (2.17) en (2.19) en U_1 gegeven door (2.18) en (2.20). Kenmerkend voor dit resultaat is dat de twee beleidsparameters onafhankelijk zijn van het saldo aan het begin van de laatste periode.

Het meer-periodenprobleem

Voor de bepaling van de optimale beslissingen in de perioden die voorafgaan aan de laatste periode wordt in principe dezelfde methode gehanteerd als voor de bepaling van de optimale beslissingsregel in de laatste periode. Ter vereenvoudiging worden in het vervolg de termen van

(2.10) welke geen betrekking hebben op de transactiekosten in de beslissingsperiode samengevoegd. Hiertoe definiëren we:

$$G_n(y_n) := L(y_n) + \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} H_{n-1}(y_n - k_n) \cdot f(k_n) dk_n \quad (2.22)$$

Door $G_n(y)$ worden dus de gediscoteerde verwachte kosten gegeven indien het saldo direct na de beslissing in de n -de periode voor de planhorizon y_n bedraagt en er een optimaal beleid gevoerd wordt in de resterende $(n-1)$ perioden.

Voor de analyse van het meer-perioden probleem met alleen proportionele transactiekosten herschrijven we (2.10), gebruikmakend van (2.22) als:

$$H_n(x_n) = \min_{y_n > x_n} [b_1 \cdot (y_n - x_n) + G_n(y_n)] ,$$

$$H_n(x_n) = \min_{y_n < x_n} [b_2 \cdot (x_n - y_n) + G_n(y_n)] . \quad (2.23)$$

Voor de bepaling van de optimale beleidsparameters maken we gebruik van de eigenschap dat $L(y)$ een convexe functie in y is. Immers uit (2.14) volgt:

$$L''(y) := \frac{d^2 L(y)}{dy^2} = (h+s) \cdot f(k) > 0 . \quad (2.24)$$

Door gebruik te maken van de convexiteit van $L(y)$ als functie van y , kan bewezen worden dat bij alleen proportionele transactiekosten $H_n(x_n)$ en $G_n(y_n)$ eveneens convexe functies zijn van respectievelijk x_n en y_n . [Zie hiervoor Elton en Gruber (1974)]. Hierdoor is het mogelijk om de optimale beleidsparameters voor het meer-perioden probleem, op eenzelfde wijze als voor de laatste periode, eenduidig te bepalen.

Noemen we het punt, waarin de som van de transactiekosten plus de verwachte kosten tot het einde van het plantijdvak ten gevolge van die transactie minimaal zijn, bij een kassaldoovermeerdering D_n en bij een

kassaldovermindering U_n , dan geldt voor $n > 1$:

$$b_1 \cdot (D_n - x_n) + G_n(D_n) = \min_{y_n} [b_1 \cdot (y_n - x_n) + G_n(y_n)] \quad (2.25)$$

$$b_2 \cdot (x_n - U_n) + G_n(U_n) = \min_{y_n} [b_2 \cdot (x_n - y_n) + G_n(y_n)] \quad (2.26)$$

Uit (2.23) volgt nu gebruikmakend van $v_n = y_n - x_n$ de optimale beslissingsregel voor het n -perioden probleem met alleen proportionele transactiekosten:

$$\begin{aligned} & D_n - x_n, \text{ indien } x_n < D_n; \\ v(x_n) = & 0 \quad \text{ " } D_n \leq x_n \leq U_n; \\ & U_n - x_n, \text{ " } x_n > U_n; \end{aligned} \quad (2.27)$$

met $D_n \leq U_n$.

Door Eppen en Fama (1969) is aangetoond dat, indien de kassaldoveranderingen per periode identiek en onafhankelijk verdeeld zijn, voor de optimale beleidsparameters geldt:

$$\begin{aligned} D_n = & \begin{aligned} & -\infty, & \text{indien } b_1 > s \cdot \alpha_{n-1}; \\ & G_n^{-1}(-b_1) > -\infty, & \text{elders.} \end{aligned} \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} U_n = & \begin{aligned} & +\infty, & \text{indien } b_2 > h \cdot \alpha_{n-1}; \\ & G_n^{-1}(b_2) < +\infty, & \text{elders.} \end{aligned} \end{aligned} \quad (2.29)$$

met $\alpha_n := \sum_{i=0}^n \alpha^i$.

Dit impliceert dat de terugkeerpunten eindige waarden bezitten, indien de contante waarden van de relevante voorraadkosten per eenheid over het plantijdvak groter zijn dan de relevante proportionele transactiekosten.

De optimale beleidsparameters indien het aantal perioden tot oneindig nadert

Voor de bepaling van de optimale beleidsparameters, indien het aantal perioden waaruit het plantijdvak bestaat tot oneindig nadert, gaan we er bovendien vanuit dat de kassaldooveranderingen per periode identiek verdeeld zijn.

Nadert n tot oneindig dan hebben de minimale verwachte gedisconteerde kosten een eindige waarde omdat de verwachte kosten in iedere periode begrensd zijn en gedisconteerd worden. Deze waarde:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \min_{(v_1, v_2, \dots, v_T)} E \left\{ \sum_{t=1}^T \alpha^{t-1} [T(v_t) + V(x_t)] \mid x_1 = x(0) \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} H_n(x) =: H(x)$$

is te bepalen door het oplossen van de volgende funktionaalvergelijking:

$$H(x) = \min_y [T(x-y) + L(y) + \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} H(y-k) \cdot f(k) dk] \quad (2.30)$$

Indien de planhorizon naar oneindig gaat, geldt in het stationaire probleem dat de beide terugkeerpunten onder zeer zwakke voorwaarden, altijd eindige waarden bezitten. Als illustratie stellen we de disconteringsfactor α gelijk aan $1/(1+h)$. De in (2.28) en (2.29) genoemde voorwaarden voor het bestaan van eindige terugkeerpunten worden nu voor het probleem met een oneindige horizon:

$$b_1 < s \cdot (1+h)/h,$$

$$b_2 < 1 + h$$

Hieruit volgt dat, indien de kosten van tekort groter zijn dan of gelijk aan de voorraadkosten ($s \geq h$), aan de voorwaarde voor het bestaan van eindige controlegrenzen altijd voldaan is, want $b_1 = b_2 = 1$ betekent dat

de transactiekosten gelijk zijn aan de transactie-omvang. Daarom veronderstellen we in het vervolg dat aan de voorwaarde voor het eindig zijn van de beleidsparameters altijd voldaan is indien de lengte van het plantijdvak naar oneindig gaat.

Voor de bepaling van het optimale beleid bij een oneindige planhorizon definiëren we:

$$D := \lim_{n \rightarrow \infty} D_n, U := \lim_{n \rightarrow \infty} U_n \text{ en } G(y) := \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(y) \quad (2.30)$$

Uit het voorafgaande volgt nu dat de optimale beslissingsregel voor het stationaire probleem, indien de planhorizon naar oneindig gaat, in iedere periode gegeven wordt door:

$$\begin{aligned} D - x_n, & \text{ indien } x_n < D; \\ v(x_n) = & 0, \quad \text{ " } D \leq x_n \leq U; \\ U - x_n, & \text{ " } x_n > U; \end{aligned} \quad (2.31)$$

met

$$D = G^{-1}(-b_1) \quad \text{en} \quad U = G^{-1}(b_2).$$

Samenvattend mogen we stellen dat het bij alleen proportionele transactiekosten, onder de overige gemaakte veronderstellingen, mogelijk is optimale beleidsparameters te bepalen die onafhankelijk zijn van de toestand op het beslissingstijdstip, dat de optimale controlegrenzen en de bijbehorende terugkeerpunten samenvallen en dat de beleidsparameters eindige waarden bezitten indien de kassaldooveranderingen per periode identiek en onafhankelijk verdeeld zijn en de planhorizon naar oneindig gaat.

2.5 Het optimale beleid bij vaste en proportionele transactiekosten

Uit de voorafgaande analyse is gebleken dat een optimaal beleid bij alleen proportionele transactiekosten gekenmerkt wordt door slechts twee beleidsparameters omdat de beide controlegrenzen met de bijbehorende terugkeerpunten samenvallen. Zijn er echter ook vaste kosten met een transactie verbonden, dan vallen de controlegrenzen en de bijbehorende terugkeerpunten niet meer samen, omdat een saldooverandering tot de terugkeerpunten niet altijd voldoende reductie van de verwachte kosten geeft om ook de vaste kosten te compenseren.

De problemen die bij het oplossen ontstaan, indien ook de vaste transactiekosten in de modelformulering worden betrokken, kunnen weer het best geïllustreerd worden door het formuleren en oplossen van het probleem aan het begin van de laatste periode: het een-periodeprobleem.

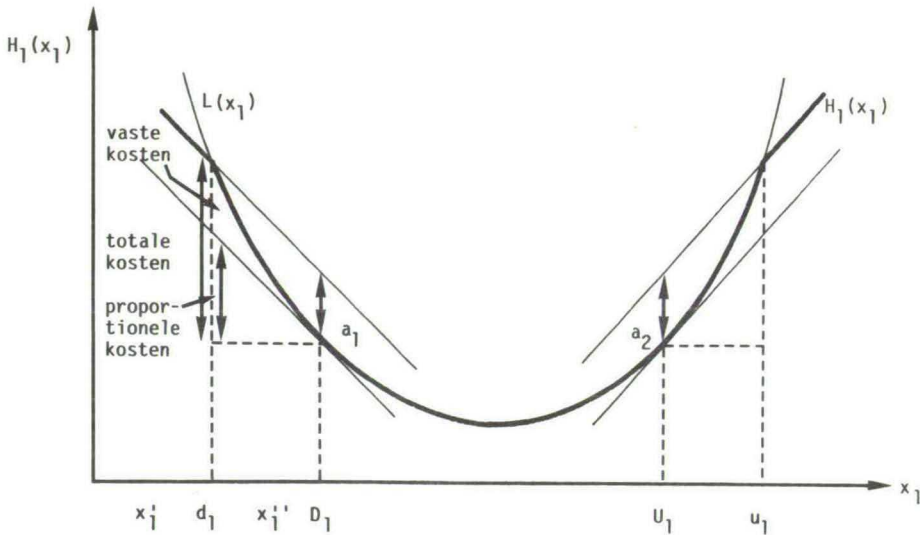
Het een-periodeprobleem

Voor het oplossen van het een-periodeprobleem schrijven we, gebruikmakend van (2.2) en (2.11), de recursievergelijking voor de laatste periode als:

$$\begin{aligned}
 & \min_{y_1 > x_1} [a_1 + b_1 \cdot (y_1 - x_1) + L(y_1)] \\
 H_1(x_1) = \min & \quad L(x_1) \qquad \qquad \qquad (2.32)
 \end{aligned}$$

$$\min_{y_1 < x_1} [a_2 + b_2 \cdot (x_1 - y_1) + L(y_1)]$$

De bepaling van de optimale oplossing wordt grafisch gegeven in figuur 2.5.



Figuur 2.5 De bepaling van de optimale beleidsparameters

Hieruit blijkt dat, indien aan de voorwaarden bij (2.17) en (2.18) voor het bestaan van eindige terugkeerpunten voldaan is, ook bij aanwezigheid van vaste transactiekosten de optimale beleidsparameters D_1 en U_1 op eenzelfde wijze bepaald kunnen worden als in het geval dat er alleen proportionele transactiekosten zijn. Dit omdat het ook bij aanwezigheid van vaste transactiekosten optimaal is, indien er een transactie uitgevoerd wordt, het saldo zodanig te veranderen dat de relevante marginale transactiekosten gelijk zijn aan de marginale voorraadkosten.

Of er een transactie uitgevoerd wordt is afhankelijk van de reductie in de verwachte voorraadkosten ten gevolge van deze transactie naar het relevante terugkeerpunt. Dit geldt bijvoorbeeld voor het kassaldo x_1' in figuur 2.5. Zijn de transactiekosten vanuit een bepaald kassaldo kleiner dan de reductie in verwachte voorraadkosten dan is het optimaal een transactie uit te voeren. Zijn de transactiekosten echter groter dan de reductie van de verwachte voorraadkosten dan is het optimaal het saldo ongewijzigd te laten. Dit geldt bijvoorbeeld voor het kassaldo x_1'' in figuur 2.5.

De punten d_1 en u_1 in figuur 2.5 geven die saldo's weer, waarbij de reductie van de verwachte voorraadkosten juist gelijk is aan de transac-

tiekosten die nodig zijn om die reductie te verkrijgen. Deze punten zijn te formuleren als:

$$d_1 := \min[x_1 | L(x_1) - L(D_1) = a_1 + b_1 \cdot (D_1 - x_1)] \quad (2.33)$$

$$u_1 := \max[x_1 | L(x_1) - L(U_1) = a_2 + b_2 \cdot (x_1 - U_1)] \quad (2.34)$$

Hierbij worden de minimale en de maximale waarde van x_1 genomen omdat er ook waarden van x_1 zijn, respectievelijk $x_1 > D_1$ en $x_1 < U_1$, die aan de in (2.33) en (2.34) gestelde voorwaarde voldoen, doch geen controlegrenzen bepalen.

Omdat de optimale beleidsparameters voor het een-periodeprobleem eenduidig te bepalen zijn, kan de optimale beslissingsregel voor de laatste periode bepaald worden door gebruik te maken van $v_1 = y_1 - x_1$ en (2.32). Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} & D_1 - x_1, \text{ indien } x_1 < d_1; \\ v(x_1) = & 0, \quad \text{"} \quad d_1 \leq x_1 \leq u_1; \\ & U_1 - x_1, \quad \text{"} \quad x_1 > u_1, \end{aligned}$$

met D_1 gegeven door (2.17) en (2.19), U_1 gegeven door (2.18) of (2.20) en d_1 en u_1 respectievelijk door (2.33) en (2.34) indien het bijbehorende terugkeerpunt een eindige waarde heeft. Is dit niet het geval dan heeft de betreffende controlegrens ook geen eindige waarde.

Uit het voorafgaande volgt dat ook voor het een-periodeprobleem met vaste transactiekosten de optimale beleidsparameters onafhankelijk van het saldo aan het begin van die periode zijn.

Uit (2.32), (2.33) en (2.34) volgt echter dat:

$$\begin{aligned} & a_1 + b_1 \cdot (D_1 - x_1) + L(D_1), \text{ indien } x_1 < d_1; \\ H_1(x_1) = & L(x_1), \quad \text{"} \quad d_1 \leq x_1 \leq u_1; \\ & a_2 + b_2 \cdot (x_1 - U_1) + L(U_1), \quad \text{"} \quad x_1 > u_1. \end{aligned}$$

Deze functie is geen convexe functie van x_1 (zie ook figuur 2.5). Hierdoor is de voor het een-periodeprobleem gebruikte oplossingsmethode niet meer bruikbaar, omdat het mogelijk is dat $G_n(y_n)$, voor waarden van n die groter dan een zijn, een lokaal minimum heeft. Het gevolg hiervan is dat het optimale beleid niet meer volledig gekarakteriseerd kan worden door de vier beleidsparameters.

Voor de analyse van het meer-perioden probleem met zowel vaste als proportionele transactiekosten schrijven we (2.10), gebruikmakend van (2.2) en (2.22) als:

$$H_n(x_n) = \min_{y_n > x_n} [a_1 + b_1 \cdot (y_n - x_n) + G_n(y_n)] , \quad (2.35)$$

$$\min_{y_n < x_n} [a_2 + b_2 \cdot (x_n - y_n) + G_n(y_n)] .$$

Bij de bepaling van de optimale beslissingsregel voor het meer-perioden probleem kan ook gebruik gemaakt worden van de formulering van de twee terugkeerpunten zoals gegeven door (2.25) en (2.26), welke we herhalen omdat ze een belangrijke functie in de rest van deze paragraaf hebben.

$$b_1 \cdot (D_n - x_n) + G_n(D_n) = \min_{y_n} [b_1 \cdot (y_n - x_n) + G_n(y_n)] \quad (2.25)$$

$$b_2 \cdot (x_n - U_n) + G_n(U_n) = \min_{y_n} [b_2 \cdot (x_n - y_n) + G_n(y_n)] \quad (2.26)$$

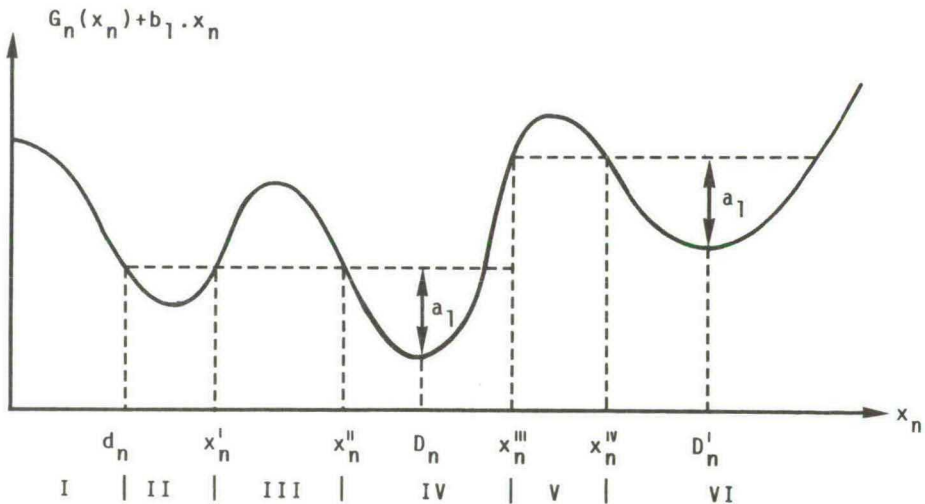
Om de analyse niet onnodig te compliceren, veronderstellen we van nu af aan dat de terugkeerpunten D_n en U_n eindige waarden hebben. Deze veronderstelling is niet noodzakelijk voor het te verkrijgen resultaat, doch vereenvoudigt de afleiding daarvan.

De beide controlegrenzen d_n en u_n kunnen voor $n \geq 1$ op eenzelfde wijze gedefinieerd worden als voor $n = 1$ door (2.33) en (2.34):

$$d_n = \min[x_n | G_n(x_n) - G_n(D_n) = a_1 + b_1 \cdot (D_n - x_n)] \quad (2.36)$$

$$u_n = \max[x_n G_n(x_n) - G_n(U_n)] = a_2 + b_2 \cdot (x_n - U_n)] \quad (2.37)$$

Ter verduidelijking van de problematiek die kan ontstaan doordat $G_n(x_n)$ geen convexe functie van x_n is, analyseren we de consequenties die dit kan hebben voor de optimale strategie. Hiertoe geven we in figuur 2.6 een voorbeeld, ontleend aan de voorraadtheorie, van een mogelijk verloop van de functie $G_n(x_n) + b_1 \cdot x_n$ [vgl. Bertsekas (1976, blz. 84) of Schneider (1979, blz. 27)]. Hierin zijn d_n en D_n getekend respectievelijk overeenkomstig (2.36) en (2.25). We kunnen nu de twee beslissingsalternatieven aan het begin van de n-de periode, het kassaldo handhaven en het kassaldo vermeerderen, met elkaar vergelijken.



Figuur 2.6 Een voorbeeld van de functie $G_n(x_n) + b_1 \cdot x_n$

In het gegeven voorbeeld is het aan het begin van de n-de periode beter om:

- het kassaldo te vermeerderen tot D_n dan het te handhaven indien het kassaldo tot het interval I of tot het interval III behoort;
- het kassaldo te handhaven dan het te vermeerderen indien het kassaldo tot de intervallen II, IV of VI behoort;

- het kassaldo te vermeerderen tot D'_n dan het te handhaven indien het tot het interval V behoort.

De eerste conclusie volgt uit het feit dat op het interval $-\infty < x_n < d_n$ en op het interval $x'_n < x_n < x''_n$ geldt:

$$G_n(x_n) + b_1 \cdot x_n > a_1 + b_1 \cdot D_n + G_n(D_n)$$

wat overeenkomt met:

$$G_n(x_n) > a_1 + b_1(D_n - x_n) + G_n(D_n),$$

zodat de waarde van de eerste regel van (2.35) kleiner is dan die van de tweede regel en het dus beter is het saldo te vermeerderen tot D_n dan het te handhaven. Op een analoge wijze zijn de andere conclusies te bewijzen.

Zoals uit het gegeven voorbeeld volgt kunnen er meerdere terugkeerpunten zijn tot waar het optimaal is het kassaldo te vermeerderen. Ook volgt eruit dat er bij een terugkeerpunt meerdere controlegrenzen kunnen behoren. Toch is het mogelijk meer specifieke uitspraken over de structuur van het optimale beleid te doen als er zowel vaste als variabele kosten met een transactie verbonden zijn, zoals aangetoond is door Girgis (1968) en Neave (1970). Wel zijn deze uitspraken afhankelijk van de waarden van de vaste transactiekosten. In dit verband zijn 5 mogelijkheden van belang:

- a) $a_1 > 0$ en $a_2 = 0$;
- b) $a_2 > 0$ en $a_1 = 0$;
- c) $a_1 = a_2$;
- d) $a_1 > a_2$;
- e) $a_2 > a_1$.

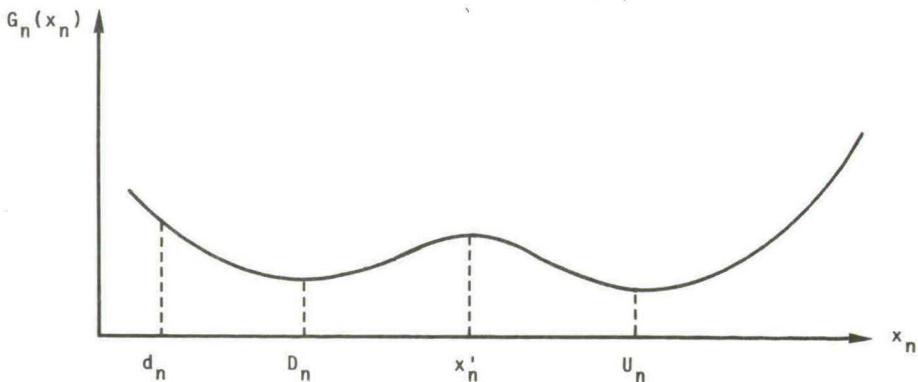
De onder a en b genoemde mogelijkheden zullen we bij de bespreking van het optimale beleid aanduiden als vaste transactiekosten in één richting; de overige genoemde mogelijkheden als vaste transactiekosten in beide richtingen.

Voor de bepaling van de structuur van de optimale beslissingsregel in het meer-perioden probleem zullen we een onderscheid maken tussen de

gevallen waarin er vaste transactiekosten in één richting zijn, en waarin er vaste transactiekosten in beide richtingen zijn.

Vaste transactiekosten in één richting

Zijn er vaste transactiekosten verbonden alleen met een kassaldovermeerdering ($a_1 > 0$ en $a_2 = 0$) of alleen met een kassaldovermindering ($a_1 = 0$ en $a_2 > 0$) dan kan gebruik gemaakt worden van de door Scarf (1960) gehanteerde methode ter bepaling van de structuur van een optimaal voorraadbeleid. Hierin speelt het begrip "K-convexiteit" een belangrijke rol. Door gebruik te maken van dit begrip kan de structuur van het optimale beleid, indien de vaste transactiekosten alleen met een kassaldovermeerdering of alleen met een kassaldovermindering verbonden zijn, nader gespecificeerd worden. De hiervoor te gebruiken methode wordt in de bijlage A.1 (blz. 201) besproken. Hierin blijkt dat de mogelijkheden zoals getekend in figuur 2.6 niet kunnen voorkomen als er alleen maar in één richting vaste kosten met een transactie verbonden zijn. Wel kan een situatie optreden zoals in figuur 2.7 wordt weergegeven door middel van de functie $G_n(x_n)$.



Figuur 2.7 Een voorbeeld van de functie $G_n(x_n)$

Zoals uit deze figuur blijkt kan het optimaal zijn het kassaldo te veranderen indien het kassaldo aan het begin van de n -de periode een waarde

heeft tussen die van de twee getekende terugkeerpunten D_n en U_n . Zijn er bijvoorbeeld alleen maar proportionele kosten verbonden met een kassaldo-vermindering en is het kassaldo aan het begin van de n -de periode gelijk aan x_n^1 , dan kan het optimaal zijn om dit saldo te verminderen.

Girgis (1968) heeft bewezen dat, indien er alleen maar met een kassaldo-vermeerdering vaste transactiekosten verbonden zijn, het optimale beleid de volgende structuur heeft:

$$\begin{aligned}
 & D_n - x_n, \text{ indien } x_n < d_n; \\
 v(x_n) = & v^0(x_n), \quad " \quad d_n \leq x_n \leq U_n; \\
 & U_n - x_n, \quad " \quad x_n > U_n,
 \end{aligned}$$

met $d_n - x_n \leq v^0(x_n) \leq 0$.

Hieruit volgt dat het op het beslissingsmoment optimaal is het kassaldo te vermeerderen tot D_n indien het kassaldo kleiner dan d_n is en het te verminderen tot U_n indien het kassaldo groter dan U_n is. Heeft het kassaldo een tussenliggende waarde dan zal er bij een optimaal beleid nooit een saldovermeerdering plaatsvinden, doch eventueel wel een vermindering.

Een analoog resultaat kan verkregen worden indien $a_1 = 0$ en $a_2 > 0$.

Het voorafgaande impliceert dat het bij vaste transactiekosten in één richting voor het meer-perioden probleem niet mogelijk is het optimaal beleid volledig te karakteriseren door beleidsparameters die onafhankelijk zijn van het saldo op het beslissingsmoment.

Vaste transactiekosten in beide richtingen

Op grond van de verkregen resultaten veronderstelde Girgis (1968) dat het optimale beleid, indien zowel de vaste transactiekosten verbonden met een kassaldovermeerdering, als de vaste transactiekosten verbonden met een kassaldovermindering ongelijk aan nul zijn, de volgende structuur heeft:

$$\begin{aligned}
 D_n - x_n, & \text{ indien } x_n < d_n; \\
 v(x_n) = & v_n^0(x) \quad , \quad " \quad d_n \leq x_n \leq u_n; \\
 U_n - x_n, & " \quad x_n > u_n,
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

met $d_n < D_n \leq U_n < u_n$.

Het optimale beleid wordt nu slechts gedeeltelijk gekarakteriseerd door de vier beleidsparameters d_n , D_n , U_n en u_n . Immers in (2.38) wordt geen beslissing gespecificeerd indien geldt: $d_n \leq x_n \leq u_n$.

Neave (1970) heeft de optimale structuur van het strategische liquiditeitsprobleem waarin beide vaste transactiecomponenten ongelijk aan nul zijn nader onderzocht. Hij bewees dat door (2.38) de optimale beslissingsregel wordt weergegeven. Bovendien gaf hij een nadere specificatie van de optimale beslissing indien geldt $d_n \leq x_n \leq u_n$.

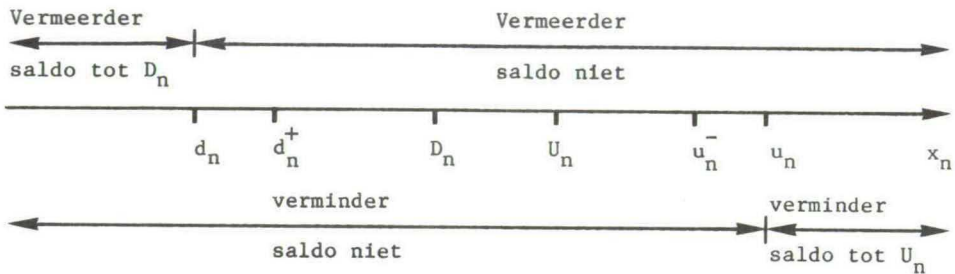
Hiervoor introduceerde hij de twee additionele beleidsparameters d_n^+ en u_n^- . De specificatie van deze beleidsparameters, welke verkregen kan worden door gebruik te maken van een convexe begrenzingstechniek, wordt gegeven in bijlage A.2 (blz. 203).

Gebruikmakend van de geïntroduceerde beleidsparameters kan de optimale beslissingsregel indien geldt $d_n \leq x_n \leq u_n$ worden gegeven door:

$$\begin{aligned}
 0 \text{ of } D_n - x_n, & \text{ indien } d_n \leq x_n < d_n^+; \\
 [d_n^+ - x_n, 0], & " \quad d_n^+ \leq x_n \leq u_n^- \text{ en } a_1 > a_2 > 0; \\
 v^0(x_n) = & 0 \quad , \quad " \quad " \quad \text{en } a_1 = a_2 > 0; \\
 [0, u_n^- - x_n], & " \quad " \quad \text{en } a_2 > a_1 > 0; \\
 0 \text{ of } U_n - x_n, & " \quad u_n^- < x_n \leq u_n;
 \end{aligned}$$

$$\text{met } d_n \leq d_n^+ \leq D_n \leq U_n \leq u_n^- \leq u_n. \tag{2.39}$$

Zoals uit (2.39) volgt kan de structuur van het optimale beleid afhankelijk zijn van de verhouding tussen de vaste transactiekosten verbonden aan een kassaldovermeerdering en die verbonden aan een kassaldovermindering. Het door (2.38) en (2.39) gegeven optimale beleid heeft de eenvoudigste structuur indien de vaste transactiekosten verbonden aan een kassaldovermeerdering gelijk zijn aan die verbonden aan een kassaldovermindering. Dit optimale beleid kan grafisch worden weergegeven als in figuur 2.8.



Figuur 2.8 Het optimale beleid indien $a_1 = a_2 > 0$ en $b_1 = b_2 > 0$

Zijn de vaste transactiekosten aan elkaar gelijk dan vertoont het optimale beleid een grote mate van overeenkomst met een (d_n, D_n, U_n, u_n) -beleid. Alleen op de intervallen $[d_n, d_n^+)$ en $(u_n^-, u_n]$ kan het optimale beleid verschillen. Wel is de omvang van de transactie bekend als er voor een beginsaldo op deze intervallen een transactie moet plaatsvinden.

Zijn de vaste transactiekosten niet aan elkaar gelijk dan is er een uitspraak mogelijk over de richting van een eventuele transactie op het interval $[d_n^+, u_n^-]$. Immers zijn de vaste transactiekosten van een kassaldovermeerdering groter dan die van een kassaldovermindering, dan zal er indien voor het kassaldo aan het begin van de n -de periode geldt: $d_n^+ < x_n < u_n^-$ bij een optimaal beleid nooit een kassaldovermeerdering plaatsvinden, zoals uit de tweede regel van (2.39) volgt. De omvang van de kassaldovermindering is echter niet bekend.

Analoog volgt uit de vierde regel van (2.39) dat indien de vaste transactiekosten van een kassaldovermindering groter zijn dan die van een kassaldovermeerdering er bij een optimaal beleid nooit een kassaldovermindering zal plaatsvinden indien geldt: $d_n^+ < x_n < u_n^-$.

Uit het voorgaande volgt dat situaties zoals getekend in figuur 2.6 in het algemene geval kunnen voorkomen. Wel zullen de beleidsparameters met een waarde groter dan D_n in het algemeen andere zijn dan die zoals aangegeven in figuur 2.6 omdat bij de bepaling van deze beleidsparameters ook het verloop van de niet getekende functie $G_n(x_n) - b_2 \cdot x_n$ een rol speelt.

2.6 Alternatieve veronderstellingen

Tot nu toe is de structuur van het optimale beleid geanalyseerd onder de volgende veronderstellingen:

1. de doelstelling van het liquiditeitsbeleid is het minimaliseren van de verwachte gedisconteerde kosten;
2. de transactiekosten bestaan uit een vaste en/of een proportionele component; bovendien zijn er geen beperkingen op de omvang van een transactie;
3. de voorraadkosten per periode zijn rechtevenredig met het saldo op het einde van een periode; bovendien worden deze kosten niet met het kassaldo verrekend;
4. de kassaldooveranderingen per periode zijn onafhankelijk verdeeld en worden gegeven door een continue kansverdeling;
5. de beslisser beschikt over twee homogene activa en een kredietverrijingsmogelijkheid.

In de literatuur is eveneens aandacht geschonken aan de bepaling van de structuur van het optimale beleid onder alternatieve veronderstellingen. De belangrijkste hiervan hebben betrekking op de doelstellingsfunctie, de transactie-omvang, de voorraadkosten, de kassaldooveranderingen per periode en het aantal in de beschouwing te betrekken liquide activa. We zullen deze achtereenvolgens bespreken.

1. De doelstellingsfunctie

Met name in de Duitstalige literatuur wordt een overeenkomstig probleem uit de produktie-voorraadtheorie geanalyseerd met als doelstellingsfunctie het minimaliseren van de gemiddelde verwachte kosten per periode. Inderfurth (1977) en Bühler (1979) hebben, elk gebruikmakend van een verschillende methode, bewezen dat, ook bij minimalisatie van de ver-

wachte kosten per periode als doelstellingsfunctie, een (D_t, U_t) -beleid optimaal is indien er alleen proportionele transactiekosten zijn.

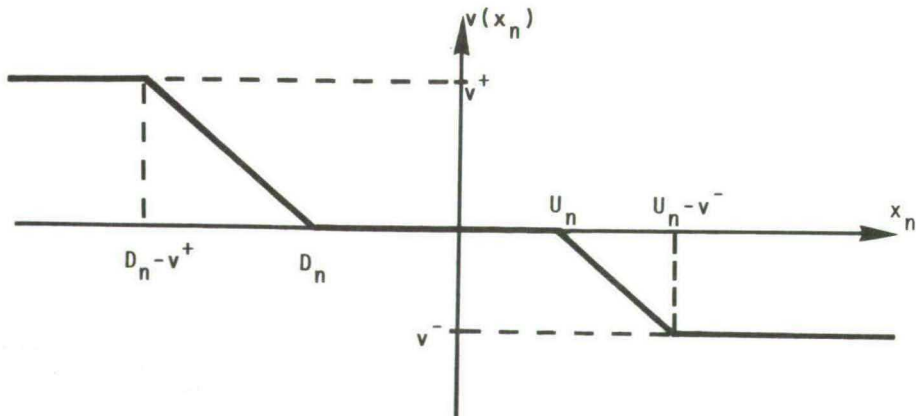
2. De transactie-omvang

Inderfurth (1978) heeft aandacht geschonken aan de invloed die beperkingen op de transactie-omvang hebben op een optimaal beleid bij alleen proportionele transactiekosten. Hij heeft bewezen dat, indien de transactie-omvang beperkt wordt door: $v^- < v_n < v^+$ voor $n = 1, 2, \dots$, met $v^- < 0 < v^+$, het optimale beleid gekarakteriseerd wordt door een (v^+, D_n, U_n, v^-) -structuur:

$$v(x_n) = \begin{array}{ll} v^+, & \text{indien } x_n < D_n - v^+; \\ D_n - x_n, & \text{" } D_n - v^+ < x_n < D_n; \\ 0, & \text{" } D_n < x_n < U_n; \\ U_n - x_n, & \text{" } U_n < x_n < U_n - v^-; \\ v^-, & \text{" } x_n > U_n - v^-; \end{array}$$

waarbij de beleidsparameters D_n en U_n afhankelijk zijn van v^- en v^+ .

De structuur van deze beslissingsregel kan grafisch worden weergegeven zoals in figuur 2.9.



Figuur 2.9 De optimale transactie-omvang bij beperkingen op de omvang

3. De voorraadkosten

Het rechtevenredig zijn van de voorraadkosten met het saldo op het einde van de periode is geen noodzakelijke voorwaarde voor het gevonden resultaat. Alternatieve specificaties worden o.m. gebruikt door Wagner (1965), Eppen en Fama (1969) en Elton en Gruber (1974). Het is voldoende indien men veronderstelt dat de verwachte voorraadkosten een convexe functie zijn van het saldo direct na de beslissing. Aan deze voorwaarde is meestal voldaan indien de kosten van het aanhouden van een voorraad en de kosten van tekort, per periode tenminste proportioneel stijgen met het desbetreffende kassaldo. Ook wordt aan deze voorwaarde voldaan indien de voorraadkosten per periode verschillen.

Impliciet is er bij de formulering van het verband tussen de saldo's in twee opeenvolgende perioden vanuit gegaan dat de transactiekosten niet met het saldo verrekend worden. Zijn de transactiekosten alleen proportioneel dan blijft het structurele resultaat ongewijzigd indien de transactiekosten met het saldo verrekend worden. Immers, stel y' is het saldo nadat een transactie uitgevoerd is en de transactiekosten verrekend zijn, dan geldt:

$$v(x) = \begin{aligned} & y' - x + b_1 \cdot v, \text{ indien } y' \geq x; \\ & y' - x - b_2 \cdot v, \quad \text{ " } \quad y' < x; \end{aligned}$$

en wordt $T(v) = T(y' - x)$:

$$T(y' - x) = \begin{aligned} & b_1 \cdot (y' - x) / (1 - b_1), \text{ indien } y' \geq x; \\ & -b_2 \cdot (y' - x) / (1 + b_2), \quad \text{ " } \quad y' < x. \end{aligned}$$

Omdat door de gecorrigeerde formulering geen fundamentele wijziging optreedt t.o.v. de gebruikte zal hierdoor ook geen wijziging ontstaan in het structurele resultaat. Het bewijs hiervan is te vinden in Porteus en Neave (1972).

4. De kassaldooveranderingen per periode

Worden de kassaldooveranderingen per periode beschreven door een discrete kansverdeling dan wordt, zoals aangetoond is door Eppen en Fama (1969), een overeenkomstig resultaat verkregen indien er alleen proportionele transactiekosten zijn. Ook het per periode onafhankelijk verdeeld zijn van de kassaldooveranderingen is voor het probleem met een eindig aantal perioden geen noodzakelijke voorwaarde voor het optimaal zijn van een (D_t, U_t) -beleid bij alleen proportionele transactiekosten. Bühler (1979) en Inderfurth (1977) hebben aangetoond dat indien de kassaldooveranderingen beschreven kunnen worden door een autoregressief proces van de eerste orde een (D_t, U_t) -beleid eveneens optimaal is. Wel zijn in dat geval de beleidsparameters afhankelijk van de voor het beslissingsmoment gerealiseerde kassaldooveranderingen.

Neave (1970) heeft de structuur van het optimale beleid bepaald bij alleen vaste transactiekosten onder de veronderstelling dat de kassaldooveranderingen per periode beschreven kunnen worden door een quasi-concave functie [zie hiervoor bijvoorbeeld Wagner (1972), blz. 540]. Aan deze eis voldoen de bekende continue kansverdelingen. Hij bewees dat indien verder geldt dat $L_n(y)$ een symmetrisch quasi-convexe functie is van y en indien $a_1 = a_2 > 0$ en $b_1 = b_2 = 0$ het optimaal beleid gegeven wordt door vier beleidsparameters waarbij geldt $U_n = D_n$ en $d_n = -u_n$.

Zowel Eppen en Fama (1968) als Inderfurth (1977) hebben de optimale beleidsparameters berekend voor verschillende kansverdelingen en kostenstructuren. In het onderzoek van Eppen en Fama kan de kassaldooverandering per periode hoogstens vijf verschillende waarden aannemen. In het onderzoek van Inderfurth is de kassaldooverandering per periode normaal verdeeld met verwachtingswaarde nul. In beide gevallen bleek het optimale beleid volledig gekarakteriseerd te kunnen worden door een (d, D, U, u) -structuur.

5. Het aantal liquide activa

Zowel Eppen en Fama (1971) als Daellenbach (1974) hebben het probleem met meer dan twee liquide activa geanalyseerd. Eerst genoemde auteurs konden onder de veronderstelling van alleen vaste transactiekosten geen expliciet beleid als optimaal aanwijzen.

Daellenbach (1974) heeft bewezen dat bij drie liquide activa, een kredietverkrijgingsmogelijkheid en alleen proportionele transactiekosten, het optimaal beleid gekarakteriseerd kan worden door de vier beleidspara-

rameters D_{1t} , D_{2t} , U_{1t} en U_{2t} , waarbij de indices 1 en 2 betrekking hebben op de twee verschillende beleggingsmogelijkheden.

2.7 Conclusies

In dit hoofdstuk hebben we de structuur van het optimale liquiditeitsbeleid geanalyseerd. De belangrijkste conclusies zijn als volgt samen te vatten:

1. Zijn er alleen proportionele kosten verbonden met een transactie tussen kasgeld en korte-termijn-beleggingen, dan vallen de beide terugkeerpunten met de bijbehorende controlegrenzen samen en kan het optimaal beleid volledig gekarakteriseerd worden door twee beleidsparameters welke onafhankelijk zijn van het saldo aan het begin van de betreffende periode. Het genoemde resultaat geldt zowel onder de oorspronkelijke als onder de alternatieve veronderstellingen.

2. Zijn er zowel vaste als variabele transactiekosten verbonden aan een transactie, dan kan het optimale beleid in het algemeen slechts gedeeltelijk gekarakteriseerd worden door beleidsparameters welke onafhankelijk zijn van het kassaldo aan het begin van de betreffende periode. Uit onderzoekresultaten is echter gebleken, dat bij bepaalde specificaties van de kassaldooverandering per periode, ook het optimaal beleid bij zowel vaste als variabele transactiekosten volledig gespecificeerd kan worden door vier beleidsparameters welke onafhankelijk zijn van het saldo aan het begin van de periode.

HOOFDSTUK 3

DE OPTIMALE BELEIDSPARAMETERS

3.1 Inleiding

De optimale oplossing van het in paragraaf 2.2 geformuleerde liquiditeitsprobleem kan in principe worden bepaald door het oplossen van de in hoofdstuk 2 gegeven recursievergelijkingen. Zijn er alleen proportionele kosten aan een transactie verbonden, dan is deze methode zeer geschikt, omdat het optimale beleid volledig gekarakteriseerd wordt door twee beleidsparameters welke eenduidig te bepalen zijn. Zijn er ook vaste kosten aan een transactie verbonden, dan is de genoemde methode minder geschikt en is het beter andere methoden te gebruiken.

Een van de doelstellingen van dit onderzoek is het evalueren van de methoden die beschikbaar zijn voor het bepalen van de optimale beleidsparameters. Een andere doelstelling is te onderzoeken in hoeverre de in de besliskundige literatuur bekende modellen voor overeenkomstige problemen bruikbaar zijn voor het oplossen van het strategische liquiditeitsprobleem. Voor het bereiken van de twee genoemde doelstellingen zullen we onder andere een aantal berekeningen maken.

Bij de bepaling van de structuur van het optimale beleid, in hoofdstuk 2, is er overeenkomstig de desbetreffende literatuur steeds uitgegaan van de in (2.4) geformuleerde doelstellingsfunctie, waarin de verwachte gediscoteerde kosten geminimaliseerd worden. Voor het berekenen van de optimale waarden van de beleidsparameters zal echter uitgegaan worden van een doelstellingsfunctie (C), waarin de verwachte gemiddelde kosten geminimaliseerd worden:

$$C := \lim_{T \rightarrow \infty} \min_{(v_1, \dots, v_T)} E \left\{ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [T(v_t) + V(x_t)] \mid x_1 = x(0) \right\} \quad (3.1)$$

Deze doelstellingsfunctie heeft als voordeel boven die van minimalisatie van de verwachte gediscoteerde kosten dat de uit te voeren berekeningen eenvoudiger zijn. Ook wordt meestal in de nog te bespreken beslissingsregels uitgegaan van de doelstellingsfunctie minimalisatie van de verwachte kosten per periode. Bovendien heeft het wijzigen van de doelstellingsfunctie nauwelijks invloed op de waarden van de optimale beleidsparameters, omdat de perioden waarop het probleem betrekking heeft vrij kort zijn, waardoor de disconteringsfactor zeer dicht bij één ligt [vgl. Hadley (1964), de Leve en Tijms (1970)].

Op grond van het voorafgaande zullen we bij de notatie van de optimale beleidsparameters geen onderscheid maken tussen die welke afkomstig zijn uit het model met gediscoteerde kosten en die welke gevonden worden met het model met gemiddelde kosten. Op eenzelfde wijze als we in (2.30) de optimale terugkeerpunten genoteerd hebben, noteren we de optimale controlegrenzen indien de planhorizon naar oneindig gaat als:

$$d := \lim_{n \rightarrow \infty} d_n \quad u := \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$$

Om de berekeningen uit te kunnen voeren moeten er waarden toegekend worden aan de kansverdelingen van de kassaldooveranderingen per periode en aan de kostenparameters. Bij de berekeningen gaan wij er vanuit dat de kassaldooveranderingen per periode identiek en onafhankelijk normaal verdeeld zijn met verwachtingswaarde μ en variantie σ^2 :

$$f(k) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(k-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (3.2)$$

Omdat we veronderstellen dat de kostenparameters onafhankelijk zijn van de tijd en dat de kassaldooveranderingen per periode identiek en onafhankelijk normaal verdeeld zijn, zijn de optimale beleidsparameters een functie van de 6 kostenparameters (h, v, a_1, a_2, b_1, b_2) en de twee parameters van de normale verdeling (μ, σ). De acht genoemde parameters waarvoor de beleidsparameters bepaald worden noemen we in het vervolg de probleemparameters en we noteren het verband tussen de beleidsparameters

en de probleemparameters als:

$$S = S(h, s, a_1, a_2, b_1, b_2, \mu, \sigma) \text{ met } S = (d, D, U, u)$$

Gegeven de doelstellingsfunctie (3.1) en de specificatie van de hiervoor relevante functies door (2.2), (2.3) en (3.2) kunnen nu de optimale beleidsparameters berekend worden indien er aan de probleemparameters waarden worden toegekend.

De indeling van dit hoofdstuk is als volgt. Eerst zullen we in paragraaf 3.2 de keuze van de te onderzoeken waarden van de probleemparameters motiveren. Vervolgens bespreken we in paragraaf 3.3 de methode van lineaire programmering voor het bepalen van de optimale oplossing en passen we deze methode toe door, voor de gekozen waarden van de probleemparameters, de optimale oplossing te berekenen. Zoals uit de resultaten zal blijken kan de structuur van het optimale beleid voor de onderzochte waarden van probleemparameters gekarakteriseerd worden door vier beleidsparameters die onafhankelijk zijn van de begintoestand. Daarna wordt in paragraaf 3.4 ook de methode van dynamische programmering, waarin men uitgaat van een bepaald beleid, toegepast en met de methode van lineaire programmering vergeleken.

In paragraaf 3.5 analyseren we de belangrijkste invloeden van veranderingen in de probleemparameters op de beleidsparameters door gebruik te maken van de uit de berekeningen verkregen resultaten. Tenslotte wordt in paragraaf 3.6 nog aandacht geschonken aan enkele methoden welke onder specifieke veronderstellingen t.a.v. de probleemparameters beschikbaar zijn en worden de belangrijkste conclusies uit dit hoofdstuk samengevat.

3.2 Te onderzoeken waarden van de probleemparameters

Bij de bepaling van de te onderzoeken combinaties van probleemparameters kunnen we, indien het optimale beleid volledig wordt gekarakteriseerd door de vier beleidsparameters, gebruik maken van eigenschappen van de optimale beleidsparameters als functies van de probleemparameters, waardoor het mogelijk is de uit de berekeningen verkregen resultaten te generaliseren. Omdat door gebruik te maken van de genoemde eigenschappen,

de invloed van een verandering in bepaalde probleemparameters met een factor $\lambda > 0$ op de beleidsparameters bepaald kan worden, zullen we deze eigenschappen in het vervolg aanduiden als de proportionaliteitseigenschappen. Voor de optimale beleidsparameters gelden de volgende twee proportionaliteitseigenschappen:

Eigenschap 2.1 Een proportionele verandering van alle kostenparameters met een factor λ heeft geen invloed op de waarden van de optimale beleidsparameters:

$$S(\lambda h, \lambda s, \lambda a_1, \lambda a_2, \lambda b_1, \lambda b_2, \mu, \sigma) = S(h, s, a_1, a_2, b_1, b_2, \mu, \sigma)$$

Eigenschap 2.2 Een proportionele verandering van de vaste transactiekosten, de verwachtingswaarde en de standaardafwijking met een factor λ heeft dezelfde proportionele verandering van de optimale beleidsparameters tot gevolg:

$$S(h, s, \lambda a_1, \lambda a_2, b_1, b_2, \lambda \mu, \lambda \sigma) = \lambda \cdot S(h, s, a_1, a_2, b_1, b_2, \mu, \sigma)$$

Het bewijs van de twee geformuleerde eigenschappen wordt gegeven in bijlage C, omdat bij de bewijsvoering gebruik gemaakt wordt van de resultaten uit paragraaf 3.4 en de daarbij behorende bijlage B.2. Het voordeel van het nu reeds gebruik maken van de genoemde eigenschappen is, dat indien het optimale beleid volledig gekarakteriseerd kan worden door vier beleidsparameters, de voor de berekeningen te kiezen waarden voor de probleemparameters niet van belang zijn, doch slechts de verhoudingen tussen de probleemparameters.

Immers uit de twee genoemde eigenschappen volgt, dat indien men een variabele kostenparameter en een parameter van de verdelingsfunctie kiest, men de andere variabele kostenparameters en de andere parameter van de verdelingsfunctie aan de gekozen parameters kan relateren en dat de vaste kostenparameters gerelateerd kunnen worden aan het produkt van de twee gekozen parameters.

Ter verduidelijking geven we het volgende voorbeeld. Stel:

$$\begin{array}{lll} h = 0,02\% & b_1 = b_2 = 0,1\% & \mu = \text{fl. } 30.000,- \\ s = 0,06\% & a_1 = a_2 = \text{fl. } 60,- & \sigma = \text{fl. } 15.000,- \end{array}$$

dan gelden indien we h en μ als norm kiezen de volgende verbanden tussen de probleemparemeters:

$$s = 3h \quad b_1 = b_2 = 5h \quad a_1 = a_2 = 10\mu h \quad \sigma = 0,5\mu$$

Stellen we bij de berekening van de optimale beleidsparemeters $h = 1$ en $\mu = 1$ en vinden we voor de gegeven verhoudingen:

$$d = -0,29 \quad D = 4,27 \quad U = 14,32 \quad u = 18,81$$

dan zijn voor het voorbeeld de volgende beleidsparemeters optimaal:

$$d = -\text{fl. } 8.700,- \quad D = \text{fl. } 128.100,- \quad U = \text{fl. } 429.600,- \quad u = \text{fl. } 564.300,-$$

Immers een proportionele verandering van de kostenparemeters met 0,0002 heeft geen invloed op de met $h = 1$ en $\mu = \text{fl. } 1,-$ gevonden optimale beleidsparemeters, doch een proportionele verandering van de vaste transactiekosten, de verwachte kassaldooverandering en de standaardafwijkingen van de kassaldooverandering met fl. 30.000,- heeft een overeenkomstige invloed op de optimale beleidsparemeters.

De gekozen waarden van de probleemparemeters

De voor de uit te voeren berekeningen gekozen waarden van de proportionele kostenparemeters hebben in principe betrekking op dezelfde intervallen, als die welke gehanteerd worden door Eppen en Fama (1968) en Miller en Orr (1968). Wel zijn om het aantal uit te voeren berekeningen te beperken zowel de vaste als de proportionele kosten van een kassaldo-vermeerdering in eerste instantie gelijkgesteld aan die van een kassaldovermindering.

Bij de keuze van de waarden voor de paremeters welke de verdelingsfunctie bepalen is er een onderscheid gemaakt tussen een verwachtingswaarde gelijk aan nul en een verwachtingswaarde ongelijk aan nul.

Is de verwachtingswaarde gelijk aan nul dan heeft er, op grond van de reeds genoemde eigenschappen van de optimale beleidsparameters, slechts één waarde voor de standaardafwijking gekozen te worden. Deze waarde fungeert dan tevens ook als norm.

Voor een verwachte kassaldooverandering per periode ongelijk aan nul, is niet de standaardafwijking doch de verwachtingswaarde als norm gekozen, omdat het meer voor de hand ligt om de invloed van een verandering in de standaardafwijking op de beleidsparameters gegeven de verwachtingswaarde te onderzoeken dan het omgekeerde. Bovendien vereenvoudigt deze keuze de presentatie en de vergelijkbaarheid van de resultaten.

In eerste instantie beperken we de te onderzoeken verwachtingswaarden van de kassaldooverandering per periode tot waarden groter dan of gelijk aan nul en kiezen we op grond van de genoemde eigenschappen en overwegingen waarden voor de probleemparameters zoals weergegeven in tabel 3.1.

	$\mu = 0$	$\mu > 0$
s	h, 3h	h, 3h
$b_1 = b_2$	0, h, 5h, 10h	0, h, 5h, 10h
σ	σ	0,5 μ , μ , 3 μ
$a_1 = a_2$	0, 0,1 σ h, σ h, 10 σ h	0, 0,1 μ h, μ h, 10 μ h

Tabel 3.1 De te onderzoeken waarden van de probleemparameters

In deze paragraaf zijn de voor het onderzoek te berekenen parametercombinaties bepaald. Bij deze bepaling is er van uitgegaan dat het optimale beleid volledig gekarakteriseerd kan worden door de vier beleidsparameters. Dat deze veronderstelling juist is voor een verwachte kassaldooverandering per periode gelijk aan nul, is voor de 32 ($2 \times 4 \times 1 \times 4$) combinaties uit tabel 3.1 met een verwachtingswaarde van nul reeds aangetoond door Inderfurth (1977).

In hoeverre, voor een verwachtingswaarde groter dan nul het optimale beleid gekarakteriseerd kan worden door beleidsparameters onderzoeken we

in de volgende paragraaf door gebruik te maken van de methode van lineaire programmering.

3.3 Berekening van de optimale oplossing met lineaire programmering

Om te onderzoeken in hoeverre het optimale liquiditeitsbeleid onder de in de vorige paragraaf beschreven additionele veronderstellingen, gekarakteriseerd kan worden door de vier beleidsparameters, berekenen we in deze paragraaf de optimale oplossing voor de 96 ($2 \times 4 \times 3 \times 4$) combinaties uit tabel 3.1 met een verwachtingswaarde groter dan nul, met de methode van lineaire programmering.

De formulering van een stochastisch discreet beslissingsprobleem als een lineair programmeringsprobleem is beschreven door Manne (1960). Deze formulering heeft voor het bepalen van de optimale oplossing van het liquiditeitsprobleem echter het nadeel dat er veel rekenwerk aan verbonden is. Deze hoeveelheid is aanzienlijk minder bij de door De Ghellinck en Eppen (1967) ontworpen alternatieve formulering, welke echter het nadeel heeft dat de probleemstelling er minder inzichtelijk door weergegeven wordt. In deze paragraaf zullen we eerst de algemene formulering bespreken en aangeven hoe de alternatieve formulering hieruit te verkrijgen is. Vervolgens bespreken we de wijze waarop we de alternatieve formulering hebben toegepast, illustreren dit met een voorbeeld en vermelden tenslotte de resultaten verkregen met de 96 combinaties met een verwachtingswaarde groter dan nul.

Formulering van het liquiditeitsprobleem als een lineair programmeringsprobleem

Om gebruik te kunnen maken van een lineair programmeringsmodel voor het oplossen van het besproken liquiditeitsprobleem, moeten eerst de toestandruimte, de beslissingsruimte en de kansverdeling van de kassaldo-veranderingen gediscretiseerd worden. Hiertoe definiëren we:

X_t : het saldo aan het begin van periode t in het gediscretiseerde model;

Y_t : het saldo na de beslissing in periode t in het gediscretiseerde model;

K_t : de kassaldoverandering in periode t in het gediscretiseerde model; en de relevante ruimten door:

$$X_t \in \{X(1), X(2), \dots, X(N)\}, \text{ met}$$

$$X(i) = X(1) + (i-1) \cdot z \text{ en } i = 1, 2, \dots, N.$$

$$Y_t \in \{Y(1), Y(2), \dots, Y(N)\}, \text{ met} \quad (3.3)$$

$$Y(w) = Y(1) + (w-1) \cdot z \text{ en } w = 1, 2, \dots, N.$$

$$K_t \in \{K(1), K(2), \dots, K(M)\}, \text{ met}$$

$$K(\ell) = K(1) + (\ell-1) \cdot z \text{ en } \ell = 1, 2, \dots, M.$$

Hierin zijn: $X(1)$, $X(N)$, $Y(1)$, $Y(N)$, $K(1)$, $K(M)$ de grenzen van de respectievelijke ruimten en is z de afstand in geldeenheden respectievelijk tussen twee opeenvolgende toestanden en tussen twee opeenvolgende mogelijke realisaties van de kassaldoverandering.

Bovendien stellen we de ondergrenzen van de toestandsruimte en van de beslissingsruimte aan elkaar gelijk: $X(1) = Y(1)$, zodat de toestands- en de beslissingsruimte samenvallen.

De gediscretiseerde kassaldoverandering per periode is nu uit de oorspronkelijke verdelingsfunctie te bepalen door de kansmassa tussen twee punten aan die punten toegekennen, de kansmassa kleiner dan $K(1)$ aan $K(1)$ en de kansmassa groter dan $K(M)$ aan $K(M)$ volgens het onderstaande principe:

$$\begin{aligned} & F(K(\ell)+0,5z), \text{ indien } \ell = 1 ; \\ P[K_t = K(\ell)] = & F(K(\ell)+0,5z) - F(K(\ell)-0,5z), 1 < \ell < M ; \\ & 1 - F(K(\ell)-0,5z), \text{ indien } \ell = M. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Voor het formuleren van de doelstellingsfunctie van het gediscretiseerde model zijn de bij dit model behorende verwachte kosten per periode van

belang. Is $X(i)$ het saldo aan het begin van een periode en $Y(w)$ het saldo na de beslissing in die periode dan zijn de verwachte kosten voor die periode in het gediscretiseerde model te geven door (3.5):

$$\begin{aligned}
 & a_1 + b_1(Y(w) - X(i)) + L(Y(w)) \text{ , indien } Y(w) > X(i); \\
 C(i, w) = & L(X(i)) \text{ , " } Y(w) = X(i); \quad (3.5) \\
 & a_2 - b_2(Y(w) - X(i)) + L(Y(w)) \text{ , " } Y(w) < X(i).
 \end{aligned}$$

Evenals in het oorspronkelijk geformuleerde probleem geldt in het gediscretiseerde probleem dat de kans om aan het begin van een periode over een bepaald saldo te beschikken afhankelijk is van het saldo aan het begin van de voorafgaande periode en de in die periode genomen beslissing. De genoemde voorwaardelijke kans noteren we als:

$$p_{ij}^w = P[X_{t+1} = X(j) \mid X_t = X(i) \wedge Y_t = Y(w)] \quad (3.6)$$

Voor het bepalen van de optimale strategie voor het gediscretiseerde liquiditeitsprobleem met als doelstellingsfunctie minimalisatie van de verwachte kosten per periode kan gebruik gemaakt worden van de door Manne (1960) gegeven lineaire programmeringsformulering.

Bij deze formulering worden zowel het saldo aan het begin van een periode als het saldo na de beslissing opgenomen als een subscript van een variabele π . De variabele π_{iw} heeft de betekenis van een kans, welke aangeeft dat in stationaire toestand de kans dat toestand $X(i)$ bereikt wordt aan het begin van een periode en dat beslissing $Y(w)$ genomen, π_{iw} bedraagt:

$$\pi_{iw} = \lim_{t \rightarrow \infty} P[X_{t+1} = X(i) \wedge Y_t = Y(w)] \quad (3.7)$$

Deze π_{iw} mag ook, omdat de planhorizon naar oneindig gaat, opgevat worden als het gemiddeld aantal keren per tijdseenheid dat het proces in toestand $X(i)$ is en dat beslissing $Y(w)$ genomen wordt.

De algemene lineaire programmeringsformulering voor het gediscretiseerde liquiditeitsprobleem is nu te schrijven als:

$$\text{minimaliseer } \sum_{i=1}^N \sum_{w=1}^N C(i,w) \cdot \pi_{iw} \quad (3.8)$$

onder de voorwaarden:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{w=1}^N \pi_{iw} = 1 \quad (3.8a)$$

$$\sum_{w=1}^N \pi_{jw} = \sum_{i=1}^N \sum_{v=1}^N \pi_{iv} p_{ij}^v \quad j = 2, 3, \dots, N \quad (3.8b)$$

$$\pi_{iw} > 0 \quad i, w = 1, 2, \dots, N \quad (3.8c)$$

In deze formulering worden de verwachte kosten per periode geminimaliseerd onder de voorwaarden dat:

- a) de som van de kansen dat toestand $X(i)$ bereikt wordt en beslissing $Y(w)$ genomen wordt gelijk aan een is (3.8a);
- b) de kans dat het kassaldo aan het begin van een periode $X(j)$ bedraagt gelijk is aan de kans dat het saldo aan het begin van de volgende periode $X(j)$ bedraagt (3.8b);
- c) de kans dat een toestand $X(i)$ bereikt wordt en dat beslissing $Y(w)$ genomen wordt groter dan of gelijk aan nul is (3.8c).

Men kan bewijzen dat voor iedere i de optimale oplossing van dit lineair programmeringsprobleem hoogstens een $\pi_{iw} > 0$ bevat [zie bv. Wagner 1975, blz. 761], zodat het optimale beleid voor iedere toestand die bereikt kan worden eenduidig vast te leggen is door: $Y(X(i)) = Y(w)$.

Een alternatieve formulering

Het nadeel van de zojuist gegeven formulering is de voor de oplossing benodigde hoeveelheid rekenwerk. Door De Ghellinck en Eppen (1967) is echter een alternatieve formulering ontworpen voor het model met gediscnteerde kosten welke door Inderfurth (1977) geherformuleerd is voor het gemiddelde kosten. Door deze alternatieve formulering wordt de omvang van het in (3.8) geformuleerde model (N^2 variabelen en N nevenvoor-

waarden) aanzienlijk gereduceerd (tot $7N-8$ variabelen en $3N-2$ voorwaarden).

Deze reducering, welke bereikt kan worden door een transactie van $X(i)$ naar $Y(w)$ te splitsen in een transactie van $X(i)$ naar het nulsaldo en vanuit het nulsaldo naar $Y(w)$, is mogelijk omdat het liquiditeitsprobleem aan de volgende voorwaarden voldoet:

a) de kans dat het saldo op een beslissingstijdstip een bepaalde waarde aanneemt is alleen afhankelijk van het saldo na de voorafgaande beslissing. Immers de kans dat een bepaalde toestand wordt bereikt aan het begin van een periode is alleen afhankelijk van het saldo na de beslissing in de voorafgaande periode:

$$p_{ji}^w = p_i^w =: P[X_{t+1} = X(i) \mid Y_t = Y(w)] \quad (3.9)$$

b) de kosten kunnen zodanig gesplitst worden in twee componenten dat een component alleen afhankelijk is van het saldo op het beslissingstijdstip, terwijl de andere component alleen afhangt van het saldo na de beslissing.

De door De Ghellinck en Eppen (1967) en de door Inderfurth (1977) afgeleide alternatieve formuleringen zijn verkregen via het duale probleem. De alternatieve formulering kan ook gedeeltelijk worden verkregen door substitutie. Hiertoe herschrijven we de doelstellingsfunctie (3.8) gebruikmakend van de onder b genoemde eigenschap als volgt:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{w=1}^N C(i,w) \cdot \pi_{iw} = \sum_{i=1}^N C(i,i) \cdot \pi_{ii} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{w=i+1}^N C(i,w) \cdot \pi_{iw} + \sum_{i=2}^N \sum_{w=1}^{i-1} C(i,w) \cdot \pi_{iw}$$

Substitutie van $C(i,w)$ uit (3.5) hierin geeft:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{w=1}^N C(i,w) \cdot \pi_{iw} = \sum_{i=1}^N L(X(i)) \cdot \pi_{ii}$$

$$+ \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{w=i+1}^N [a_1 + b_1(Y(w)-X(i)) + L(Y(w))] \cdot \pi_{iw}$$

$$+ \sum_{i=2}^N \sum_{w=1}^{i-1} [a_2 - b_2(Y(w) - X(i)) + L(Y(w))] \cdot \pi_{iw}$$

Deze formule kan herschreven worden als:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{w=1}^N C(i,w) \cdot \pi_{iw} &= \sum_{i=1}^N L(X(i)) \cdot \pi_{ii} - \sum_{i=1}^{N-1} b_1 \cdot X(i) \sum_{w=i+1}^N \pi_{iw} \\ &+ \sum_{w=2}^N [a_1 + b_1 \cdot Y(w) + L(Y(w))] \cdot \sum_{i=1}^{w-1} \pi_{iw} \\ &+ \sum_{i=2}^N b_2 \cdot X(i) \cdot \sum_{w=1}^{i-1} \pi_{iw} \\ &+ \sum_{w=1}^{N-1} [a_2 - b_2 \cdot Y(w) + L(Y(w))] \cdot \sum_{i=w+1}^N \pi_{iw} \end{aligned}$$

Vervolgens definiëren we de volgende variabelen

$$\begin{aligned} \delta_i &:= \pi_{ii} & i &= 1, 2, \dots, N ; \\ \eta_i &:= \sum_{w=i+1}^N \pi_{iw} & i &= 1, 2, \dots, N-1 ; \\ \omega_i &:= \sum_{w=1}^{i-1} \pi_{iw} & i &= 2, 3, \dots, N ; \\ \rho_w &:= \sum_{i=1}^{w-1} \pi_{iw} & w &= 2, 3, \dots, N ; \\ v_w &:= \sum_{i=w+1}^N \pi_{iw} & w &= 1, 2, \dots, N-1 . \end{aligned}$$

We kunnen de geïntroduceerde variabelen gebruikmakend van de betekenis van π_{iw} nu als volgt interpreteren: de variabelen δ_i , η_i en ω_i representeren de invariante kansen wanneer het kassaldo aan het begin van een periode $X(i)$ bedraagt. Omdat de optimale oplossing hoogstens een $\pi_{iw} > 0$

bevat voor elke i , zal voor elke i ook hoogstens een van de drie genoemde variabelen een waarde groter dan nul aannemen.

Is $\delta_i > 0$, dan zal bij een optimaal beleid het kassaldo, indien het $X(i)$ bedraagt, niet veranderd worden. Is $\eta_i > 0$, dan zal bij een optimaal beleid het kassaldo, indien het $X(i)$ bedraagt, door een transactie vermeerderd worden en is $\omega_i > 0$ dan zal bij een optimaal beleid, het kassaldo, indien het $X(i)$ bedraagt, door een transactie verminderd worden.

De variabelen ρ_w en v_w representeren cumulatieve invariante kansen. ρ_w is de kans dat er aan het begin van een periode bij een optimaal beleid een transactie plaatsvindt waardoor het saldo vermeerderd wordt tot $Y(w)$. v_w is de kans dat er aan het begin van een periode bij een optimaal beleid een transactie plaatsvindt waardoor het kassaldo verminderd wordt tot $Y(w)$.

Door gebruik te maken van de geïntroduceerde variabelen en van variabelen welke voor de interpretatie van de resultaten niet van belang zijn, kan nu de alternatieve formulering uit de algemene formulering verkregen worden. Deze herformulering wordt beschreven in bijlage B.1 (blz. 208). Het optimale beleid kan nu door gebruik te maken van de optimale oplossing, bepaald worden door toepassing van de volgende beslissingsregel:

$$\min[Y(w) \quad w > i, \rho_w > 0] \quad , \quad \text{indien } \eta_i > 0 ;$$

$$Y(X(i)) = \quad X(i) \quad , \quad \quad \delta_i > 0 ; \quad (3.10)$$

$$\max[Y(w) \quad w < i, v_w > 0] \quad , \quad \quad \omega_i > 0 .$$

Uit de eerste regel van (3.10) volgt, overeenkomstig de betekenis van η_i , dat het saldo bij een optimaal beleid vermeerderd moet worden indien $\eta_i > 0$, en wel tot de kleinste waarde $Y(w)$, waarvoor geldt $w > i$ en $\rho_w > 0$. Immers evenals in figuur 2.6 kunnen er meerdere toestanden zijn tot waar het saldo bij een optimaal beleid vermeerderd wordt. Vanuit een bepaalde toestand is het, indien bij een optimaal beleid het saldo vermeerderd moet worden, alleen maar optimaal indien dit gebeurt tot het eerstvolgende terugkeerpunt.

Uit de tweede regel van (3.8) volgt dat bij $\delta_i > 0$ het saldo indien het $X(i)$ bedraagt gehandhaafd moet worden en uit de derde regel van (3.10)

volgt dat bij $\omega_i > 0$ het saldo verminderd moet worden tot de hoogste waarde van $Y(w)$, waarvoor geldt $w < i$ en $v_w > 0$. Immers de hoogste waarde van $Y(w)$ is bij een vermindering weer het meest nabije terugkeerpunt.

Toepassing van de alternatieve methode

Om gebruik te kunnen maken van de besproken alternatieve methode, moeten de overgangskansen berekend en waarden voor z , N , M , X_{\min} en K_{\min} gekozen worden.

De kans dat het kassaldo aan het begin van een periode $X(i)$ bedraagt, gegeven het saldo direct na de beslissing in de voorafgaande periode $Y(w)$, wordt gedefinieerd door

$$P[K > Y(w) - X(1)] ;$$

$$P_1^w = P[K = Y(w) - X(i)] , 1 < i < N ; \quad (3.11)$$

$$P[K < Y(w) - X(N)] .$$

De waarden voor z , M en K_{\min} , X zijn zodanig gekozen dat de kassaldoveranderingen goed beschreven worden en dat de rekentijden binnen redelijke grenzen blijven. Op grond van deze uitgangspunten zijn de in tabel 3.2 weergegeven waarden gebruikt.

σ	z	K_{\min}	M
$0,5\mu$	$0,2\mu$	$-0,6\mu$	17
μ	$0,2\mu$	$-2,0\mu$	31
3μ	$0,5\mu$	$-8,0\mu$	37

Tabel 3.2 De gekozen waarden voor σ , z , K_{\min} en M

De te kiezen waarden van X_{\min} en N zijn afhankelijk van alle waarden van de probleemparemeters. Bij de keuze kan gebruik gemaakt worden van het

feit dat indien er geen transactiekosten zijn ($a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$ en K normaal verdeeld) de optimale oplossing op een eenvoudige wijze met behulp van een tabel van de cumulatieve standaard normale verdeling te bepalen is. Vervolgens zijn dan door verhoging van de vaste en de proportionele transactiekosten zowel de omvang als de locatie van de toestands- en de beslissingsruimte vrij adequaat te berekenen.

Illustratie van en resultaten met de alternatieve methode

Ter illustratie van de beschreven methode geven we een voorbeeld, waarin wij gebruik maken van de volgende waarden van de probleemparameters en overige invoergegevens

$$h = 1 \quad s = 3 \quad \mu = 1 \quad \sigma = 1 \quad a_1 = a_2 = 0,1 \quad b_1 = b_2 = 1$$

$$z = 0,2 \quad X_{\min} = -3,4 \quad N = 50 \quad K_{\min} = -2,0 \quad M = 31$$

Uit de invoergegevens op de tweede regel volgt, dat door gebruik te maken van (3.3) de relevante variabelen de volgende waarden aan kunnen nemen:

$$X(i) = -3,4 + (i-1) \times 0,2 \quad i = 1, 2, \dots, 50 \quad (3.12a)$$

$$Y(w) = -3,4 + (w-1) \times 0,2 \quad w = 1, 2, \dots, 50 \quad (3.12b)$$

$$K(\ell) = -2,0 + (\ell-1) \times 0,2 \quad \ell = 1, 2, \dots, 31 \quad (3.12c)$$

De uit de berekening verkregen relevante variabelen met in de optimale oplossing een waarde groter dan nul, worden vermeld in tabel 3.3.

$\eta_i > 0$, voor $i = 5$ t/m 24	$\rho_{26} = 0,7191$
$\delta_i > 0$, voor $i = 25$ t/m 38	
$\omega_i > 0$, voor $i = 39$ t/m 48	$v_{35} = 0,0012$

Tabel 3.3 De relevante uitvoergegevens voor de bepaling van de optimale beleidsparameters

Het optimale beleid kan nu voor de gegeven combinatie van probleemparameters met behulp van de uitvoergegevens en (3.10) bepaald worden als:

$$\begin{aligned}
 & 1,6 \quad , \quad \text{indien } -2,6 \leq X(i) \leq 1,2 \\
 Y(w) = & \quad X(i) \quad , \quad \text{"} \quad 1,4 \leq X(i) \leq 4,0 \quad (3.13) \\
 & 3,4 \quad , \quad \text{"} \quad 4,2 \leq X(i) \leq 6,0
 \end{aligned}$$

Immers, omdat $\delta_i > 0$ betekent dat het kassaldo gehandhaafd moet worden indien het $X(i)$ bedraagt, volgt uit $\delta_i > 0$ voor $i = 25$ t/m 38 en (3.12a) dat het saldo gehandhaafd moet worden indien het groter dan of gelijk aan $-3,4 + 24 \times 0,2$ is en kleiner dan of gelijk aan $-3,4 + 37 \times 0,2$ is. De eerste regel van (3.13) volgt uit: $\eta_i > 0$, $i = 5$ t/m 24 en $\rho_{26} \neq 0$. Immers hieruit volgt door gebruik te maken van (3.12a) dat het kassaldo vermeerderd moet worden door een transactie indien op het beslissingsmoment geldt: $-3,4 + 4 \times 0,2 \leq X(i) \leq -3,4 + 23 \times 0,2$. En omdat alleen $\rho_{26} \neq 0$ volgt (3.12b) dat het kassaldo vermeerderd moet worden tot $-3,4 + 25 \times 0,2$. Het resultaat op de derde regel van (3.13) is op eenzelfde wijze te bepalen.

Uit de uitvoergegevens volgt bovendien dat in de stationaire toestand de kans dat een kassaldovermeerdering door een transactie plaatsvindt ($= \rho_{26}$), gelijk is aan 0,7191, de kans dat er een kassaldovermindering door een transactie plaatsvindt ($= v_{35}$) gelijk is aan 0,0012 en dus dat de kans dat het kassaldo gehandhaafd wordt gelijk is aan $1 - 0,7191 - 0,0012 = 0,2797$.

Omdat de relevante variabelen voor waarden van $i < 4$ en $i > 39$ gelijk aan nul zijn, kan de toestandsvariabele $X(i)$ geen waarde kleiner dan $-2,6$ of groter dan 6 bereiken. Dat wil zeggen dat $4 < i < 39$. Immers omdat het laagste saldo waarbij geen transactie wordt uitgevoerd gelijk is aan $1,4$ volgt uit (3.12c) dat het laagste saldo dat bereikt kan worden gelijk is aan $1,4 - (-2,0 + 30 \times 0,2) = -2,6$ en omdat het hoogste saldo waarbij geen transactie uitgevoerd wordt gelijk is aan $4,0$ is het hoogste saldo dat bereikt kan worden gelijk aan $4,0 - (-2,0) = 6,0$.

We hebben de controlegrenzen d en u gedefinieerd respectievelijk als de laagste en de hoogste waarde waarbij het kassaldo gehandhaafd wordt. Daarom volgt uit het voorafgaande dat voor de gekozen waarden van de probleemparameters het optimale beleid een (d, D, U, u) -structuur heeft met:

$$d = 1,4 \quad D = 1,6 \quad U = 3,4 \quad u = 4,0.$$

Dit resultaat mag op grond van de reeds in paragraaf 3.2 genoemde eigenschappen van de optimale beleidsparameters gegeneraliseerd worden tot het algemene resultaat dat voor $s = 3h$; $a_1 = a_2 = 0,1\mu h$, $b_1 = b_2 = h$ en $\sigma = \mu$ de optimale beleidsparameters gelijk aan:

$$d = 1,4\mu \quad D = 1,6\mu \quad U = 3,4\mu \quad u = 4,0\mu.$$

De resultaten van de berekeningen met de 96 parametercombinaties waarbij de verwachte kassaldooverandering groter dan nul is worden weergegeven in de tabellen I.1 t/m I.6 van bijlage I (blz. 242 t/m 247). Evenals in het gegeven voorbeeld blijkt hieruit dat ook voor de andere onderzochte combinaties van probleemparameters, het optimale beleid in principe een (d, D, U, u) -structuur heeft. In principe omdat bij een aantal combinaties van probleemparameters de kans dat er ten gevolge van kassaldooveranderingen een zodanig saldo gevormd wordt dat dit door een transactie verminderd moet worden (bijna) gelijk aan nul is. Hierop wordt later uitvoeriger ingegaan.

3.4 Berekening van de optimale beleidsparameters met dynamische programmering

Zoals uit de berekeningen van de optimale oplossingen met de methoden van lineaire programmering is gebleken, mogen we veronderstellen, dat indien de kassaldooveranderingen per periode identiek en onafhankelijk normaal verdeeld zijn, het optimale beleid volledig gekarakteriseerd kan worden door vier beleidsparameters. Uitgaande van deze veronderstelling is het op een eenvoudige wijze mogelijk de optimale beleidsparameters met dynamische programmering te berekenen.

In deze paragraaf zullen we eerst deze methode bespreken, vervolgens berekenen we hiermee de optimale beleidsparameters voor de gekozen waarden van de probleemparameters en tenslotte vergelijken we de gebruikte methode van lineaire programmering met de gebruikte methode van dynamische programmering.

De minimaal verwachte kosten per periode kunnen evenals de minimaal verwachte gediscoteerde kosten bepaald worden door het oplossen van een recursievergelijking. Voor het formuleren van deze vergelijking definiëren we:

$C_n(x)$: de minimaal verwachte gemiddelde kosten, uitgaande van een kassaldo x aan het begin van de n -de periode voor het einde van het plantijdvak.

Het optimale liquiditeitsbeleid kan nu bepaald worden door het oplossen van de volgende recursievergelijking:

$$C_n(x_n) = \min_{y_n} \left\{ \frac{1}{n} \cdot [T(x_n, y_n) + L(y_n) + (n-1) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} C_{n-1}(y_n - k) \cdot f(k) dk] \right\}$$

$$C_0(y_1 - k) \equiv 0 \quad (3.14)$$

Evenals in het model met gediscoteerde kosten heeft het voor de verdere uitwerking voordelen om de elementen uit (3.14) die geen betrekking hebben op de transactiekosten in periode n in een nieuwe functie, waarvan de waarde afhangt van het saldo direct na de beslissing, samen te voegen. Hiertoe definiëren we:

$$I_n(y_n) := L(y_n) + (n-1) \int_{-\infty}^{+\infty} C_{n-1}(y_n - k) \cdot f(k) dk \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

Uit (2.25), (2.26), (2.36) en (2.37), volgen de vergelijkingen

$$b_1 \cdot D_n + I_n(D_n) = \min_{y_n} [b_1 \cdot y_n + I_n(y_n)] \quad (3.16)$$

$$-b_2 \cdot U_n + I_n(U_n) = \min_{y_n} [-b_2 \cdot y_n + I_n(y_n)] \quad (3.17)$$

$$d_n = \min[y_n | b_1 \cdot y_n + I_n(y_n) = a_1 + b_1 \cdot D_n + I_n(D_n)] \quad (3.18)$$

$$u_n = \max[y_n | -b_2 \cdot y_n + I_n(y_n) = a_2 - b_2 \cdot U_n + I_n(U_n)] \quad (3.19)$$

Er van uitgaande dat het optimale beleid volledig gekarakteriseerd wordt door de vier m.b.v. (3.16) t/m (3.19) bepaalde beleidsparementers zijn deze berekend voor de in paragraaf 3.2 gekozen combinaties van de probleemparameters. De hiervoor gehanteerde methode wordt beschreven in bijlage B.2 (blz. 210).

Omdat de gehanteerde methode een benaderingsmethode is voor het bepalen van de optimale beleidsparementers indien n naar oneindig gaat, moet een stopcriterium gehanteerd worden om het aantal uit te voeren iteraties te beperken. Hiervoor gebruiken we het grootste absolute verschil tussen de waarden van dezelfde beleidsparementers in twee opeenvolgende perioden. Is dit verschil kleiner dan een afkapwaarde ϵ , dan worden de berekende waarden van de beleidsparementers beschouwd als een goede benadering voor de optimale waarden van de beleidsparementers indien de planhorizon naar oneindig gaat.

In tabel 3.4 geven we een voorbeeld van de resultaten verkregen met de in bijlage B.2 beschreven methode met als stopcriterium $\epsilon = 10^{-4}$. In dit voorbeeld wordt dezelfde combinatie van probleemparameters gebruikt als in het voorbeeld van de voorafgaande paragraaf.

Zoals uit tabel 3.4 blijkt zal er bij een optimaal beleid aan het begin van de laatste periode ($n=1$) nooit een transactie worden uitgevoerd waardoor het kassaldo verminderd wordt, omdat de proportionele transactiekosten verbonden met een kassaldovermindering nooit lager zijn dan de mogelijke reductie in de verwachte voorraadkosten. Wel is het mogelijk dat het saldo door een transactie verminderd wordt aan het begin van de voorlaatste periode ($n=2$). Ook is in tabel 3.4 te zien dat de waarden van de onderste controlegrens en het onderste terugkeerpunt in de laatste periode duidelijk verschillen van die in de voorlaatste periode. De verschillen tussen de waarden van dezelfde beleidsparementers in de hieraan voorafgaande perioden nemen echter sterk af. Indien we de optimale beleidsparementers van de 11-de en de 12-de periode voor het einde van het plantijdvak met elkaar vergelijken, zien we dat er alleen nog maar kleine verschillen zijn tussen de bovenste terugkeerpunten en controlegrenzen van de genoemde perioden.

n	d_n	D_n	U_n	u_n
1	0,64412	1,00000	$+\infty$	$+\infty$
2	1,17523	1,50315	2,95294	3,43551
3	1,23466	1,58447	3,22246	3,70478
4	1,24981	1,60610	3,37747	3,87440
5	1,25456	1,61302	3,44740	3,95157
6	1,25621	1,61545	3,47626	3,98359
7	1,25681	1,61633	3,48762	3,99621
8	1,25703	1,61666	3,49199	4,00107
9	1,25711	1,61678	3,49365	4,00292
10	1,25714	1,61683	3,49429	4,00361
11	1,25716	1,61685	3,49453	4,00388
12	1,25716	1,61685	3,49462	4,00398

Tabel 3.4 De optimale beleidsparementers voor: $h = 1$, $\mu = 1$, $s = 3h$,
 $a_1 = a_2 = 0,1\mu h$, $b_1 = b_2 = h$, $\sigma = \mu$ en $\epsilon = 10^{-4}$

Omdat het voor de verdere analyse voldoende is indien de optimale beleidsparementers met twee decimalen achter de komma bekend zijn, kunnen

we de optimale beleidsparameters nu bepalen als:

$$d = 1,26 \quad D = 1,62 \quad U = 3,49 \quad u = 4,00$$

Zoals uit tabel 3.4 blijkt wordt dit resultaat ook reeds bij een stopcriterium van $1,30 \times 10^{-2}$ na 7 iteraties bereikt.

Door gebruik te maken van de proportionaliteitseigenschappen kunnen we het verkregen resultaat generaliseren tot het algemene resultaat dat voor $s = 3h$, $a_1 = a_2 = 0,1\mu h$, $b_1 = b_2 = h$ en $\sigma = \mu$ de optimale beleidsparameters gelijk zijn aan:

$$d = 1,26\mu \quad D = 1,62\mu \quad U = 3,49\mu \quad u = 4,00\mu$$

Om de invloed van de waarde van het stopcriterium op de resultaten te onderzoeken zijn een aantal combinaties van probleemparameters onderzocht voor verschillende waarden van het stopcriterium. De resultaten staan vermeld in Bijlage II (blz. 251). Evenals uit tabel 3.4, volgt hieruit dat met een stopcriterium van $0,01\mu$ de waarden van de beleidsparameters voldoende nauwkeurig berekend kunnen worden.

De met dit criterium verkregen resultaten voor de onderzochte combinaties van de probleemparameters met een verwachtingswaarde groter dan nul staan naast de reeds vermelde resultaten zoals verkregen met de methode van lineaire programmering in de tabellen I.1 t/m I.6 van bijlage I (blz. 242 t/m 247). De resultaten voor een verwachtingswaarde gelijk aan nul staan in tabel I.7 van bijlage I (blz. 248). Een voorbeeld van de resultaten zoals vermeld in bijlage I voor een verwachtingswaarde groter dan nul wordt gegeven in tabel 3.5.

Zoals uit de genoemde tabellen blijkt, is er een grote mate van overeenstemming tussen beide resultaten. Zeker als men er rekening mee houdt, dat de mogelijke waarden van de beleidsparameters bepaald m.b.v. lineaire programmering beperkt zijn door de toegepaste discretisering van de relevante variabelen en dat alleen die waarden van het kassaldo in de optimale oplossing van de lineaire programmeringsformulering kunnen voorkomen.

$a_1=a_2$	LP-methode				DP-methode			
	d	D	U	u	d	D	U	u
0	1,0 μ	1,0 μ	1,0 μ	1,0 μ	1,00 μ	1,00 μ	1,00 μ	1,00 μ
0,1 μ h	0,8 μ	1,0 μ	1,0 μ	1,2 μ	0,65 μ	1,01 μ	1,01 μ	1,38 μ
μ h	0,0 μ	1,4 μ	1,4 μ	2,8 μ	-0,07 μ	1,45 μ	1,45 μ	2,86 μ
10 μ h	-2,0 μ	3,6 μ			-2,21 μ	3,57 μ	3,57 μ	8,04 μ

Tabel 3.5 De optimale beleidsparementers voor $s = h$, $b_1 = b_2 = 0$ en $\sigma = 0,5\mu$

Om een indruk te geven van het aantal iteraties dat nodig is om de waarden van de beleidsparementers bij een stopcriterium van 0,01 μ te bepalen, worden in tabel 3.6 de waarden gegeven van het aantal iteraties dat nodig is bij $\sigma = \mu$ en $s = h$.

$a_1=a_2$	$b = 0$	$b = h$	$b = 5h$	$b = 10h$
0	2	8	26	45
0,1 μ h	3	9	26	45
μ h	5	11	28	46
10 μ h	14	19	35	52

Tabel 3.6 Het aantal iteraties bij $\epsilon = 0,01\mu$, $s = h$ en $\sigma = \mu$

Uit tabel 3.6 blijkt dat de vaste transactiekosten minder invloed hebben op het aantal iteraties dan de proportionele transactiekosten. Bovendien blijkt dat na een relatief gering aantal perioden de limietwaarden van de beleidsparementers reeds goed benaderd zijn. Dit laatste is van belang omdat de resultaten van tabel 3.6 ook geïnterpreteerd kunnen worden als de lengte van het plantijdvak waarvoor de gevonden waarden van de beleidsparementers in ieder geval gelden.

Uit de gemaakte berekeningen is gebleken dat de kosten van tekort en de standaardafwijking van de kassaldooveranderingen slechts een geringe in-

vloed hebben op het aantal iteraties. In het algemeen bleek het aantal iteraties voor $s = 3h$ circa 10% lager te zijn als vermeld in tabel 3.6. Voor $\sigma = 0,5\mu$ en $\sigma = 3\mu$ is eenzelfde resultaat gevonden als voor $\sigma = \mu$ met dien verstande dat het gemiddelde aantal iteraties iets lager is voor $\sigma = 0,5\mu$ en iets hoger is voor $\sigma = 3\mu$.

Alvorens nader in te gaan op de uit de berekeningen verkregen resultaten, bespreken we eerst een aantal voor- en nadelen van de twee gebruikte methoden.

- Het voordeel van de methode van lineaire programmering is dat hiermee zowel de structuur van het optimale beleid bepaald kan worden, als dat hiermee de waarden van de optimale beleidsparameters en de minimaal verwachte kosten per periode berekend kunnen worden. Het voordeel van de gebruikte methode van dynamische programmering is dat hiermee alle waarden van de beleidsparameters voor iedere lengte van het plantijdvak berekend kunnen worden. Dit is zowel van belang voor de nadere analyse van de resultaten als voor de economische interpretatie.

- Het gebruiken van de methode van lineaire programmering voor het berekenen van de optimale waarden van de beleidsparameters heeft boven het gebruiken van de methode van dynamische programmering het voordeel dat er standaardpakketten beschikbaar zijn. Wel moet nog een programma voor het maken van het invoerbestand geschreven worden. Ook werd met het gebruikte standaardpakket (LP 2900) geen oplossing verkregen als de gekozen grenzen voor de relevante ruimten "sterk" afweken van de achteraf noodzakelijke.

- Vergelijken we de methode van lineaire programmering met die van dynamische programmering op basis van geheugenbeslag en rekentijd dan valt deze vergelijking duidelijk ten gunste van de methode van dynamische programmering uit. De rekentijd met de methode van dynamische programmering is hoogstens 10-25% van die benodigd met de methode van lineaire programmering.

3.5 Eigenschappen van de optimale beleidsparameters

In paragraaf 3.2 zijn reeds twee algemene eigenschappen vermeld waaraan de optimale beleidsparameters voldoen. Deze eigenschappen, welke betrekking hebben op de invloed van proportionele veranderingen in meerdere probleemparameters op de optimale beleidsparameters, bieden de mogelijkheid om de uit de berekeningen verkregen resultaten te generaliseren.

Voor het verkrijgen van eenvoudig berekenbare formules ter benadering van de optimale beleidsparameters, hetgeen een van de doelstellingen van dit onderzoek is, moeten ook de invloeden van veranderingen in de afzonderlijke modelparameters op de optimale beleidsparameters bekend zijn. Bovendien zijn dan ook, zoals zal blijken, de invloeden van veranderingen in de afzonderlijke probleemparameters op $u-d$, $D-d$, $u-U$ en $U-D$ van belang.

De eerstgenoemde grootheid, $u-d$, zullen we in het vervolg aanduiden als de omvang van het continueringsgebied, omdat indien het kassaldo op het beslissingsmoment tot het interval $[d,u]$ behoort er geen transactie plaatsvindt. De verschillen $D-d$ en $u-U$ zijn bepalend voor respectievelijk de minimale transactie-omvang bij een kassaldovermeerdering en de minimale transactie-omvang bij een kassaldovermindering. Daarom zullen wij deze grootheden in het vervolg ook als zodanig aanduiden. De laatstgenoemde grootheid $U-D$ noemen we de afstand tussen de twee terugkeerpunten.

We beperken ons in deze paragraaf tot het vermelden van de belangrijkste invloeden van veranderingen in de individuele probleemparameters op de genoemde grootheden, zoals deze uit de verkregen berekeningen te distilleren zijn. Een analyse van de oorzaken wordt gegeven in hoofdstuk 8 waar deze invloeden ook nader onderzocht worden voor de ontwikkeling van benaderingsformules.

Voor het bepalen van de invloed van een verandering in een probleemparameter op de relevante grootheden maken we gebruik van de resultaten verkregen met dynamische programmering, zoals weergegeven in de tabellen I.1 t/m I.6 van bijlage I (blz. 242 t/m 247) omdat we hiermee de waarden voor alle beleidsparameters hebben kunnen berekenen.

Uit deze resultaten zijn een aantal duidelijke invloeden van veranderingen in de waarden van de individuele probleemparameters op de waarden

van de optimale beleidsparemeters en de daarmee samenhangende grootheden af te leiden. We zullen deze invloeden bespreken en met voorbeelden van de resultaten uit bijlage I toelichten door de invloed van een vermeerdering van de volgende probleemparemeters te analyseren:

- de kosten van tekort;
- de vaste transactiekosten;
- de proportionele transactiekosten;
- de standaardafwijking van de kassaldoveranderingen.

a) De invloed van de kosten van tekort

Uit de resultaten blijkt dat een vermeerdering van de kosten van tekort een stijging van alle vier de beleidsparemeters tot gevolg heeft. Eveneens leidt dit tot een verkleining van het continueringsgebied indien de beleidsparemeters niet samenvallen.

Voorbeelden van de genoemde effecten zijn te vinden in tabel 3.7 waarin de optimale beleidsparemeters zowel voor kosten van tekort gelijk aan die van het in voorraad houden als voor kosten van tekort gelijk aan driemaal de kosten van het in voorraad houden voor $b_1 = b_2 = h$ en $\mu = \sigma$ vermeld staan.

$a_1 = a_2$	$s = h$				$s = 3h$			
	d	D	U	u	d	D	U	u
0	$0,90\mu$	$0,90\mu$	$2,96\mu$	$2,96\mu$	$1,59\mu$	$1,59\mu$	$3,44\mu$	$3,44\mu$
$0,1\mu h$	$0,46\mu$	$0,94\mu$	$3,01\mu$	$3,51\mu$	$1,26\mu$	$1,62\mu$	$3,49\mu$	$4,00\mu$
μh	$-0,34\mu$	$1,36\mu$	$3,38\mu$	$4,93\mu$	$0,68\mu$	$1,93\mu$	$3,94\mu$	$5,48\mu$
$10\mu h$	$-2,43\mu$	$3,30\mu$	$5,30\mu$	$9,90\mu$	$-0,46\mu$	$4,23\mu$	$6,23\mu$	$10,83\mu$

Tabel 3.7 De optimale beleidsparemeters voor $b_1 = b_2 = h$ en $\sigma = \mu$

b) De invloed van de vaste transactiekosten

Zoals eveneens uit tabel 3.7 blijkt heeft een vermeerdering van de vaste transactiekosten tot gevolg dat:

- De onderste controlegrens daalt en het onderste terugkeerpunt en de bovenste controlegrens stijgen. De invloed op het bovenste terugkeerpunt

is echter, in tegenstelling tot de combinaties in tabel 3.7, in het algemeen niet eenduidig.

- De omvang van het continueringsgebied stijgt doordat de controlegrenzen zich in tegenovergestelde richting bewegen.
- De minimale transactie-omvang zowel bij een kassaldovermeerdering als bij een kassaldovermindering duidelijk toeneemt.

c) De invloed van de proportionele transactiekosten

Een vermeerdering van de proportionele transactiekosten heeft duidelijk een stijging van zowel het bovenste terugkeerpunt als van de bovenste controlegrens tot gevolg, zoals ook uit tabel 3.8 blijkt waarin de optimale beleidsparameters voor $a_1 = a_2 = \mu h$ en $s = h$ gegeven worden. Omdat de invloed van een vermeerdering van de variabele transactiekosten op de twee andere beleidsparameters geringer is heeft een stijging van de variabele transactiekosten een vergroting van het continueringsgebied tot gevolg. Er is echter geen eenduidige invloed op de minimale transactie-omvang.

$b_1=b_2$	$\sigma = \mu$				$\sigma = 3\mu$			
	d	D	U	u	d	D	U	u
0	-0,33 μ	1,34 μ	1,34 μ	2,93 μ	-1,55 μ	1,15 μ	1,15 μ	3,79 μ
h	-0,34 μ	1,36 μ	3,38 μ	4,93 μ	-2,28 μ	0,11 μ	4,12 μ	6,48 μ
5h	-0,37 μ	1,39 μ	11,38 μ	12,90 μ	-2,87 μ	-0,62 μ	12,59 μ	14,94 μ
10h	-0,47 μ	1,42 μ	21,38 μ	22,87 μ	-2,99 μ	-0,69 μ	22,62 μ	24,98 μ

Tabel 3.8 De optimale beleidsparameters voor $a_1 = a_2 = \mu h$ en $s = h$

d) De invloed van de standaardafwijking

Zoals eveneens uit tabel 3.8 blijkt heeft een vermeerdering van de standaardafwijking een stijging van de bovenste controlegrens en een vergroting van het continueringsgebied tot gevolg. Bovendien heeft een vermeerdering van de standaardafwijking in de meeste gevallen zowel een vermeerdering van de minimale transactie-omvang bij een kassaldovermindering als bij een kassaldovermeerdering tot gevolg.

3.6 Slotopmerkingen en conclusies

In dit hoofdstuk zijn twee methoden voor het bepalen van de optimale oplossing van het liquiditeitsprobleem besproken en is de optimale oplossing van een aantal combinaties van probleemparameters berekend.

Alvorens de belangrijkste conclusies uit dit hoofdstuk samen te vatten, vermelden we eerst nog de uit de literatuur bekende resultaten voor het berekenen van de optimale beleidsparameters indien er specifieke veronderstellingen gemaakt worden omtrent de kansverdelingen van de kassaldo-veranderingen en de mogelijkheden om de optimale beleidsparameters te benaderen.

Wagner (1965) en Hochstädter (1971) hebben de optimale beleidsparameters analytisch bepaald bij alleen proportionele transactiekosten en een specifieke veronderstelling omtrent de kansverderling van de kassaldo-veranderingen per periode. Wagner veronderstelt dat de kassaldo-veranderingen per periode uniform verdeeld zijn en gebruikt bij de bepaling het criterium minimalisatie van de verwachte gediscoteerde kosten. Hochstädter gaat uit van een exponentieel verdeelde kassaldo-verandering en het criterium minimalisatie van de verwachte kosten per periode.

Aan het benaderen van de optimale beleidsparameters voor een produktie-voorraadprobleem, met een zelfde structuur als het liquiditeitsprobleem, is aandacht geschonken door Bühler (1979). Hij onderzocht een tweetal benaderingen ter bepaling van de optimale beleidsparameters voor een model met alleen proportionele aanpassingskosten waarin de planhorizon naar oneindig gaat. De ene is gebaseerd op een Taylor-benadering van de kansverdeling van de vraag per periode, de andere op het uitgangspunt dat de limietverdeling van de mogelijke toestanden aan het begin van een periode een normale verdeling heeft. Beide benaderingen hebben het voordeel dat ze aanzienlijk minder rekentijd vergen dan voor het berekenen van de optimale beleidsparameters met behulp van dynamische programmering nodig is. Uit zijn onderzoek, waarin de vraag per periode onafhankelijk en identiek $B\grave{e}ta$ verdeeld is, blijkt dat vooral de tweede benaderingsmethode goede resultaten geeft voor $(b_1+b_2)/(h+s) < 5$.

Aan benaderingen voor de optimale beleidsparameters indien vaste transactiekosten een rol spelen wordt eveneens aandacht geschonken door Bühler (1979). Hij heeft, er van uitgaande dat een (d_t, D_t, U_t, u_t) -beleid optimaal is, de invariante verdeling van de beginsaldo's als functie van de beleidsparameters bepaald. Omdat deze verdelingsfuncties echter niet door een analytisch hanteerbare uitdrukking weer te geven zijn, kunnen ook de optimaliteitsvoorwaarden niet analytisch opgelost worden. Daarom noemt hij de mogelijkheid om de optimale waarden van de beleidsparameters te benaderen door gebruik te maken van Taylor-ontwikkelingen. Hij geeft echter geen resultaten die betrekking hebben op de kwaliteit van een dergelijke benadering.

Nu we de beschikbare methoden voor het bepalen van de beleidsparameters besproken hebben, kunnen we de belangrijkste conclusies uit dit hoofdstuk als volgt samenvatten:

1. Zijn er alleen proportionele kosten aan een transactie verbonden dan is het mogelijk, indien de verdelingsfunctie van de kassaldooverandering per periode aan bepaalde voorwaarden voldoet, de optimale beleidsparameters analytisch en met behulp van benaderingsmethoden te bepalen.
2. Zijn er zowel vaste als proportionele kosten verbonden aan een transactie dan is lineaire programmering de voor de hand liggende methode, indien het optimaal beleid volledig gekarakteriseerd wordt door vier beleidsparameters, dan is dynamische programmering de aangewezen methode.
3. Indien het optimale beleid volledig gekarakteriseerd kan worden door de vier beleidsparameters dan geldt:
 - een proportionele verandering van alle kostenparameters met een zelfde factor heeft geen invloed op de waarden van de optimale beleidsparameters;
 - een proportionele verandering van de vaste transactiekosten, de verwachtingswaarde en de standaardafwijking met een factor λ heeft een zelfde proportionele verandering van de optimale beleidsparameters tot gevolg.

4. Zijn de kassaldooveranderingen per periode onafhankelijk en identiek normaal verdeeld dan gaan we er van uit dat het optimale beleid volledig gekarakteriseerd wordt door vier beleidsparameters.

5. Zijn de kassaldooveranderingen per periode onafhankelijk en identiek normaal verdeeld dan hebben veranderingen in de waarden van de individuele kostenparameters de volgende invloeden op de optimale beleidsparameters:

- een vermeerdering van de kosten van tekort leidt tot een stijging van alle vier de beleidsparameters;
- de minimale transactie-omvang stijgt als de vaste transactiekosten toenemen;
- de afstand tussen de terugkeerpunten wordt groter als de proportionele transactiekosten stijgen;
- een vermeerdering van de standaardafwijking heeft een vergroting van het continueringsgebied tot gevolg.

HOOFDSTUK 4

SUB-OPTIMALE BESLISSINGSREGELS VOOR HET LIQUIDITEITSPROBLEEM

4.1 Inleiding

In het voorafgaande hoofdstuk is het liquiditeitsprobleem geformuleerd als een discreet stochastisch dynamisch optimaliseringsprobleem en zijn de beleidsparameters berekend met de uit de literatuur hiervoor bekende methoden van lineaire- en dynamische programmering. Gezien echter de omvang van het "rekenwerk" zijn de twee gehanteerde methoden voor praktische toepassing minder geschikt.

Wijzigt men bepaalde veronderstellingen van het in paragraaf 3.1 geformuleerde liquiditeitsprobleem, dan is de optimale beslissingsregel voor het gewijzigde probleem vaak aanzienlijk eenvoudiger te berekenen dan die voor het in paragraaf 3.1 geformuleerde probleem. De berekende beslissingsregel is dan echter niet meer optimaal voor dat probleem. Daarom zullen we de met gewijzigde veronderstellingen verkregen beslissingsregels aanduiden als sub-optimale beslissingsregels.

Een nadere omschrijving van dit begrip geven we in paragraaf 4.2, waarin we ook de keuze van de in de volgende hoofdstukken te bespreken sub-optimale beslissingsregels motiveren.

Voor het evalueren van de gekozen sub-optimale beslissingsregels voor het liquiditeitsprobleem zal gebruik gemaakt worden van een op de gemiddelde verwachte kosten per periode gebaseerd criterium. De gebruikte methode ter berekening van de gemiddelde verwachte kosten per periode bij toepassing van de sub-optimale beslissingsregel op het in paragraaf 3.1 geformuleerde liquiditeitsprobleem wordt besproken in paragraaf 4.3. Evenals voor de optimale beleidsparameters gelden er ook voor de verwachte kosten per periode eigenschappen waardoor het mogelijk is de uit de berekeningen verkregen resultaten te generaliseren. Genoemde eigenschappen en het hierop gebaseerde evaluatiecriterium zijn het onderwerp van paragraaf 4.4.

4.2 Sub-optimale beslissingsregels voor het liquiditeitsprobleem

Kenmerkend voor de te behandelen sub-optimale beslissingsregels voor het liquiditeitsprobleem is dat ze aan de volgende voorwaarden voldoen:

- a) ze zijn gebaseerd op veronderstellingen die slechts gedeeltelijk afwijken van de veronderstellingen van het in paragraaf 3.1 geformuleerde liquiditeitsprobleem;
- b) de berekening van de beleidsparameters van de sub-optimale beslissingsregel is duidelijk eenvoudiger dan de berekening van de optimale beleidsparameters;
- c) te verwachten is dat de sub-optimale beslissingsregel, althans voor een aantal combinaties van probleemparameters, bij toepassing op het oorspronkelijke liquiditeitsprobleem niet tot duidelijk hogere verwachte kosten per periode leidt dan de minimaal verwachte kosten (C), die ontstaan bij toepassing van de optimale beslissingsregel.

Aan het evalueren van sub-optimale beslissingsregels is ook aandacht geschonken in de voorraad- en in de produktie-voorraadtheorie. Een aantal van de in de genoemde theorieën gebruikte modelformuleringen vertoont een grote mate van overeenkomst met het in het vorige hoofdstuk behandelde strategische liquiditeitsprobleem.

Uit de resultaten van de genoemde evaluaties blijkt dat het mogelijk is om eenvoudig berekenbare beslissingsregels af te leiden die bij toepassing nauwelijks hogere verwachte kosten per periode tot gevolg hebben dan indien men de optimale beslissingsregel zou hebben toegepast. Deze resultaten hebben er toe geleid ook een aantal sub-optimale beslissingsregels voor het liquiditeitsprobleem te construeren.

De in hoofdstuk 5 te bespreken sub-optimale beslissingsregels zijn afkomstig uit de voorraadtheorie. Hoewel er een belangrijk verschil is tussen de veronderstellingen die ten grondslag liggen aan de voorraadtheorie en de liquiditeitstheorie, doordat de stochastische veranderingen in de voorraadtheorie (mogelijke realisaties van de vraag) alleen maar positieve waarden aan kunnen nemen, is er in de financiële literatuur toch uitgebreid aandacht geschonken aan de genoemde voorraadtheoretische benadering. Zoals uit de resultaten zal blijken is een dergelijke benadering bij een kleine variatie-coëfficiënt ook gerechtvaardigd.

Bij de in hoofdstuk 6 te bespreken sub-optimale beslissingsregel gaan we er vanuit dat de klasse van toegelaten beslissingen beperkt is tot de klasse van lineaire beslissingsregels. Een dergelijke beslissingsregel is echter alleen maar optimaal bij een kwadratische doelstellingsfunctie en dus niet bij de voor het liquiditeitsprobleem geldende doelstellingsfunctie. Vooral in de duitstalige literatuur, met name door Bühler (1979), Inderfurth (1977), Schneeweiss (1977) en Schneider (1979), is veel aandacht geschonken aan de toepassing van deze regel op produktie-voorraadproblemen met een identieke structuur als het liquiditeitsprobleem. Goede resultaten zijn met deze beslissingsregel verkregen voor de gevallen waarin de verwachtingswaarde van de exogene veranderingen (afwijkingen van een bepaalde vraag) gelijk aan nul is en de kosten van endogene veranderingen (produktie-aanpassingen) alleen maar proportioneel zijn. Op grond van deze resultaten hebben we besloten ook de lineaire beslissingsregel als alternatief te evalueren.

De in hoofdstuk 7 te bespreken beslissingsregel is gebaseerd op de uit de technische wetenschappen afkomstige besturingstheorie waarin men er vanuit gaat dat zowel de controle als de bijsturing continu plaatsvindt. Het voordeel van het modelleren van financiële problemen op een overeenkomstige wijze, hetgeen steeds vaker gebeurt in de financiële literatuur, is dat het in een aantal gevallen mogelijk is de resultaten in een eenvoudige formule weer te geven, waardoor de interpretatie vereenvoudigd en de toepassing bevorderd wordt. Aan de consequenties van het uitgangspunt continue controle en bijsturing voor het modelleren van problemen die een periodiek karakter hebben, wordt in de financiële literatuur echter nauwelijks aandacht geschonken. Door het evalueren van een op een continue benadering gebaseerde beslissingsregel hopen wij hiertoe een bijdrage te leveren.

4.3 Berekening van de verwachte kosten per periode

Om de sub-optimale beslissingsregels te kunnen evalueren zullen de gemiddelde verwachte kosten per periode zowel bij toepassing van de optimale als bij toepassing van de sub-optimale beslissingsregels bekend moeten zijn.

In deze paragraaf wordt een methode besproken voor het berekenen van de verwachte kosten per periode, ervan uitgaande dat de sub-optimale beslissingsregel volledig gekarakteriseerd wordt door dezelfde vier beleidsparameters als de optimale beslissingsregel. Aan dit uitgangspunt wordt voldaan door de voorraadtheoretische benadering en de benadering die gebaseerd is op continue bijsturing. De lineaire beslissingsregel voldoet niet aan het genoemde uitgangspunt; de verwachte kosten per periode bij toepassing van deze beslissingsregel volgen rechtstreeks uit het in hoofdstuk 6 te bespreken model.

Voor het berekenen van de verwachte kosten per periode bij toepassing van een sub-optimale beslissingsregel moeten de overgangskansen en de invariante kansen bij toepassing van deze regel bekend zijn. Hiertoe noteren we de kans dat het kassaldo aan het begin van periode $t+1$: $X(j)$ bedraagt, gegeven het kassaldo aan het begin van periode t : $X(i)$, en dat van de vier beleidsparameters dit beleid aangegeven worden door: d_B , D_B , U_B en u_B , overeenkomstig (3.6) als:

$$p_{ij}^B := P[X_{t+1} = X(j) | X_t = X(i), d_B, D_B, U_B, u_B] \quad (4.1)$$

De kans dat gegeven de waarden van de beleidsparameters het kassaldo in de evenwichtstoestand de waarde $X(i)$ aanneemt:

$$\pi_i^B := \lim_{t \rightarrow \infty} P[X_t = X(i) | d_B, D_B, U_B, u_B] \quad (4.2)$$

is nu te bepalen uit:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \pi_i^B &= 1 \\ \pi_j^B &= \sum_{i=1}^N \pi_i^B p_{ij}^B \quad j = 2, 3, \dots, N \end{aligned} \quad (4.3)$$

Bedraagt het kassaldo aan het begin van een periode $X(i)$, dan zijn de verwachte kosten in die periode gegeven de beleidsparameters:

$$\begin{aligned}
 & a_1 + b_1(D_B - X(i)) + L(D_B) \quad , \quad \text{indien } X(i) < d_B; \\
 C_B(i) = & L(X(i)) \quad , \quad " \quad d_B \leq X(i) \leq u_B; \\
 & a_2 - b_2 \cdot (u_B - X(i)) + L(u_B) \quad , \quad " \quad X(i) > u_B.
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

De verwachte kosten per periode in de evenwichtstoestand gegeven de beleidsparameters (C_B), is nu te bepalen uit:

$$C_B = \sum_{i=1}^N \pi_i^B \cdot C_B(i) \tag{4.5}$$

Voor het berekenen van de verwachte kosten per periode bij toepassing van de sub-optimale beslissingsregel moeten, evenals bij de berekeningen met de methode van lineaire programmering in paragraaf 3.3, de kassaldo-veranderingen, de toestandsruimte en de beslissingsruimte gediscrèteerd worden.

Om de invloed van de discretisering op de verwachte kosten per periode te onderzoeken, zijn voor een aantal combinaties van probleemparameters de minimaal verwachte kosten per periode voor verschillende waarden voor de z berekend. De resultaten hiervan staan vermeld in de tabellen III.1 t/m III.3 van bijlage III (blz. 252) en gedeeltelijk in tabel 4.1.

σ	z_1	$C(z_1)$	z_2	$C(z_2)$	$\Delta C(z)^*$
0,5 μ	0,2 μ	0,636 μh	0,005 μ	0,635 μh	-0,001 μh
μ	0,2 μ	1,271 μh	0,01 μ	1,270 μh	-0,001 μh
3 μ	0,5 μ	3,804 μh	0,03 μ	3,811 μh	0,007 μh

Tabel 4.1 De invloed van discretisering op de verwachte kosten per periode voor $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$ en $s = 3h$.

*) $\Delta C(z) = [C(z_2) - C(z_1)]$

In tabel 4.1 staan de verwachte kosten indien er geen transactiekosten zijn omdat de verwachte voorraadkosten dan ook te berekenen zijn door gebruik te maken van een tabel voor de standaard normale verdeling.

Uit de tabellen III.1 t/m III.3 en tabel 4.1 blijkt dat de relatieve invloed van de discretisering op de verwachte kosten per periode bij de voor z_1 gegeven waarden vrij gering is. Weliswaar is de absolute invloed bij de voor $\sigma = 3\mu$ gekozen waarde duidelijk groter dan de voor $\sigma = 0,5\mu$ en $\sigma = \mu$ gekozen waarden van z_1 , maar dit wordt gedeeltelijk gecompenseerd door de hogere verwachte kosten die bij $\sigma = 3\mu$ optreden.

Op grond van de verkregen resultaten zijn, rekeninghoudend met de rekentijden, voor de berekening van de verwachte kosten per periode bij een verwachte kassaldooverandering per periode groter dan nul dezelfde waarden voor de relevante grootheden gekozen als bij de methode van lineaire programmering (zie tabel 3.2 (blz. 59)). Voor de berekeningen van de verwachte kosten per periode bij een verwachte kassaldooverandering per periode gelijk aan nul is gekozen voor de volgende waarden van de relevante grootheden:

$$z = 0.2\sigma \quad K(1) = -3.0\sigma \quad M = 31$$

Omdat uit de resultaten gebleken is, dat de discretisering met de gekozen waarden slechts een geringe invloed heeft op de verwachte kosten per periode, zullen wij er bij de evaluatie van de beslissingsregels verder geen aandacht aan schenken.

4.4 Het evaluatiecriterium

Om uitspraken te kunnen doen over de kwaliteit van de sub-optimale beslissingsregel als benadering voor de optimale beslissingsregel zal er een criterium gehanteerd moeten worden. Bij de formulering van dit criterium maken we gebruik van het feit dat, indien voor de beleidsparameters de proportionaliteitseigenschappen gelden er ook voor de verwachte kosten per periode bij toepassing van de beslissingsregel eigenschappen gelden waardoor het mogelijk is de uit de berekeningen verkregen resultaten te generaliseren.

Eigenschap 4.1 Voldoen de beleidsparameters van de te hanteren beslissingsregel aan de eigenschap dat een proportionele verandering van alle kostenparameters met een factor λ geen invloed heeft op de waarde van de beleidsparameters, dan heeft een proportionele verandering van alle kostenparameters met een factor λ dezelfde proportionele verandering van de verwachte kosten per periode tot gevolg:

$$C_B(\lambda h, \lambda s, \lambda a_1, \lambda a_2, \lambda b_1, \lambda b_2, \mu, \sigma) = \lambda \cdot C_B(h, s, a_1, a_2, b_1, b_2, \mu, \sigma)$$

Dat deze eigenschap geldt is als volgt in te zien. Omdat een proportionele verandering van de kostenparameters geen invloed heeft op de beleidsparameters blijft de invariante verdeling ongewijzigd. De verwachte kosten per periode gegeven een bepaald kassaldo veranderen echter evenredig met de kostenparameters zoals direct uit formules (4.4) en (2.13) volgt.

Eigenschap 4.2 Voldoen de beleidsparameters aan de eigenschap dat een proportionele verandering van de vaste transactiekosten en de parameters van de verdelingsfunctie met een factor λ leidt tot dezelfde verandering van de beleidsparameters, dan heeft een proportionele verandering van de genoemde probleemparameters met een factor λ dezelfde proportionele verandering van de verwachte kosten per periode tot gevolg:

$$C_B(h, s, \lambda a_1, \lambda a_2, b_1, b_2, \lambda \mu, \lambda \sigma) = \lambda \cdot C_B(h, s, a_1, a_2, b_1, b_2, \mu, \sigma)$$

Dat deze eigenschap geldt is als volgt te zien. Discretiseren we de toestandruimte als in (3.3) dan blijven de overgangswaarschijnlijkheden ongewijzigd waardoor ook de invariante verdeling dezelfde blijft. De verwachte kosten per periode, gegeven een bepaald kassaldo, veranderen echter evenredig met dezelfde factor zoals uit (4.4) en (4.5) volgt.

Heeft de sub-optimale beslissingsregel een structuur welke overeenkomt met die van de optimale beslissingsregel, dan geeft het verschil tussen de waarden van de met de sub-optimale beslissingsregel berekende beleidsparameters en de waarde van de overeenkomstige optimale beleidsparameter reeds een indicatie van de kwaliteit van de sub-optimale beslissingsregel.

Bij de analyse van de genoemde verschillen maken we gebruik van het symbool Δ dat de volgende betekenis heeft:

ΔS : waarde van beleidsparameter S volgens sub-optimale beslissingsregel minus waarde van de optimale beleidsparameter S .

Een voor de hand liggend criterium voor het evalueren van sub-optimale beslissingsregels is het verschil in gemiddelde verwachte kosten per periode dat ontstaat door toepassing van de sub-optimale beslissingsregel in plaats van de optimale. Dit criterium heeft echter als nadeel dat algemene conclusies niet mogelijk zijn omdat het verschil, indien aan de in 4.1 en 4.2 genoemde voorwaarden wordt voldaan, afhankelijk is van de absolute waarden van de probleemparameters. Dit nadeel is niet aanwezig als men met het relatieve verschil in gemiddelde verwachte kosten per periode werkt en de beleidsparameters aan de in 4.1 en 4.2 genoemde voorwaarden voldoet, omdat dan alleen de verhoudingen tussen de probleemparameters van belang zijn. Met laatstgenoemde maatstaf zullen we dan ook in eerste instantie de sub-optimale beslissingsregels evalueren. We doen dit door het berekenen van de procentuele afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode die ontstaan door het toepassen van de sub-optimale beslissingsregel.

Voor het berekenen van de waarden van het geïntroduceerde evaluatiecriterium zijn de minimaal verwachte kosten per periode van belang. Deze zijn, evenals de kansen op een transactie, reeds bekend uit de berekeningen met de methode van lineaire programmering. Genoemde kosten en kansen op een transactie worden voor de in tabel 4.1 genoemde parametercombinaties gegeven in bijlage IV (blz. 253 t/m 260). Hierin wordt, omdat dit voor de nadere analyse van het verschil tussen de optimale- en sub-optimale beslissingsregels van belang is, een onderscheid gemaakt tussen de verwachte voorraadkosten per periode (C_V) en de verwachte transactiekosten per periode (C_T). Een voorbeeld van de resultaten wordt gegeven in tabel 4.2.

$a_1=a_2$	$P[v>0]$	$P[v<0]$	C_V	C_T	C
0	0,964	0,014	$0,396\mu h$	$0,000\mu h$	$0,396\mu h$
$0,1\mu h$	0,920	0,004	$0,398\mu h$	$0,092\mu h$	$0,490\mu h$
μh	0,470	<	$0,600\mu h$	$0,470\mu h$	$1,070\mu h$
$10\mu h$	0,158	<	$1,604\mu h$	$1,582\mu h$	$3,186\mu h$

Tabel 4.2 De kans op een transactie ($< : < 0.001$) en de verwachte kosten per periode bij een optimaal beleid en $b_1 = b_2 = 0$, $s = h$, en $\sigma = 0,5\mu$

In deze tabel zijn de verwachte kosten per periode, die berekend zijn met $\mu = 1$ en $h = 1$, op grond van de proportionaliteitseigenschap generaliseerd en uitgedrukt in μh .

Zoals uit deze tabel blijkt is bij een variatiecoëfficiënt van 0,5 de kans op een transactie die een kassaldoevermindering tot gevolg heeft erg klein en bestaan de verwachte transactiekosten per periode voornamelijk uit de transactiekosten verbonden met een kassaldoevermeerdering.

HOOFDSTUK 5

EEN VOORRAADTHEORETISCHE BENADERING VOOR HET LIQUIDITEITSPROBLEEM

5.1 Inleiding

Aan "de voorraadtheoretische benadering" worden in de financiële literatuur twee verschillende betekenissen toegekend. Gebruikt men het begrip in de meer algemene betekenis dan gaat men er vanuit dat het aanwezige kassaldo beschouwd kan worden als een voorraadgrootheid en dat de realisaties van de kassaldooveranderingen zowel positief als negatief kunnen zijn.

In de omschreven betekenis wordt het begrip meestal gebruikt om een onderscheid te maken tussen methoden voor het oplossen van het liquiditeitsprobleem als besproken in hoofdstuk twee en bijvoorbeeld planningsmethoden als besproken in hoofdstuk een.

In dit hoofdstuk gebruiken wij het begrip in de meer specifieke betekenis, namelijk dat voor het oplossen van het liquiditeitsprobleem gebruik gemaakt wordt van modellen en resultaten uit de voorraadtheorie.

De in de financiële literatuur gehanteerde voorraadtheoretische modellen voor het oplossen van het liquiditeitsprobleem kunnen verdeeld worden in modellen die dienen ter bepaling van de optimale transactiekas en modellen die dienen ter bepaling van de optimale voorzorgskas. Bij de modellen die ontworpen zijn ter bepaling van de optimale transactiekas wordt het aan te houden kassaldo bepaald door een afweging te maken tussen de voorraad- en de transactiekosten. Kenmerkend voor de meeste modellen die dienen ter bepaling van de optimale transactiekas is het uitgangspunt dat de kassaldooveranderingen per periode bekend zijn en dat de bijsturing op elk tijdstip kan plaatsvinden.

Bij de modellen ter bepaling van de optimale voorzorgskas ligt het accent op de invloed van het stochastische karakter van de kassaldooverandering op het aan te houden kassaldo. In deze modellen vindt er een afweging plaats tussen de verwachte kosten die samenhangen met het aanhou-

den van een kassaldo en de verwachte kosten die gemaakt moeten worden bij "noodfinanciering" indien het kassaldo onvoldoende blijkt te zijn om aan de betalingsverplichtingen te voldoen. Kenmerkend voor de meeste op de voorraadtheorie gebaseerde modellen ter bepaling van de voorzorgskas is het een-periodekarakter. Een uitzondering hierop is de bijdrage van Tsiang (1969). Bij hem staat de tijd die nodig is voor het verkrijgen van additionele middelen via onderhandelingen centraal. Aan de modellen ter bepaling van de optimale voorzorgskas zullen we verder geen aandacht schenken omdat deze modellen meer betrekking hebben op de aan te houden hoeveelheid liquiditeiten dan op de verdeling van de beschikbare liquiditeiten.

Een van de bekendste toepassingen van resultaten uit de voorraadtheorie op het liquiditeitsprobleem is afkomstig van Baumol (1952). Ter inleiding van zijn artikel motiveert Baumol deze methode als volgt: "A stock of cash is its holders inventory of the medium of exchange, and like an inventory of a commodity, cash is held because it can be given up at the appropriate moment, serving then as its possessor's part of the bargain in an exchange". Mede dank zij de bijdrage van Baumol wordt, ondanks de beperkende veronderstellingen, in veel financiële handboeken aandacht besteed aan het toepassen van de uit de voorraadtheorie afkomstige resultaten voor de bepaling van het aan te houden kassaldo [bijvoorbeeld: Brealey en Myers (1981) en Weston en Brigham (1981)]. Hiervoor zijn als redenen te noemen:

- ① de ruime aandacht die de voorraadmodellen ter bepaling van de transactie- en verzorgsvraag gekregen hebben in de financiële tijdschriften;
- ② de bijdrage die deze benadering kan leveren ter verduidelijking en oplossing van zowel de korte als de lange termijn financiële planningsproblematiek;
- ③ de eenvoudige toepasbaarheid.

Aan de voorraadtheoretische benadering van het meer-periodenprobleem met stochastische kassaldooveranderingen per periode wordt in de financiële literatuur echter geen aandacht besteed. Dit is opmerkelijk omdat, zoals uit de tabellen van bijlage I (blz. 242 t/m 250) blijkt, het optimale liquiditeitsbeleid vaak gekarakteriseerd kan worden door dezelfde beleidsparameters als het voorraadbeleid.

In dit hoofdstuk zal op twee manieren aandacht geschonken worden aan voorraadtheoretische benaderingen van het liquiditeitsprobleem. Eerst door in paragraaf 5.2 een beschrijving te geven van de bekendste voorraadtheoretische modellen ter bepaling van de optimale transactiekas. Vervolgens wordt in 5.3 onderzocht of de door Wagner, O'Hagan en Lundh (1965) ontwikkelde empirische beslissingsregel bruikbaar is voor het liquiditeitsprobleem. Hiertoe wordt deze beslissingsregel in paragraaf 5.3 besproken en in paragraaf 5.4 geëvalueerd en bruikbaar gemaakt tot een alternatief voor het optimale beleid.

5.2 Bepaling van de optimale transactiekas

De bekendste bijdragen voor het bepalen van de optimale transactiekas werden onafhankelijk van elkaar gepubliceerd door Baumol (1952) en Tobin (1956). Het belangrijkste verschil tussen deze bijdragen is de wijze waarop het probleem wordt opgelost. Tobin gebruikt een direct op het liquiditeitsprobleem gerichte methode. Hierdoor kan hij, in tegenstelling tot Baumol, ook rekening houden met de transactiekosten die verbonden zijn met het beleggen van een gedeelte van het beschikbare kassaldo. Omdat Tobin's probleemstelling een betere aansluiting geeft aan het in paragraaf 3.2 geformuleerde liquiditeitsprobleem dan de voorraadtheoretische probleemstelling van Baumol en omdat Tobin's methode een mogelijkheid biedt om de voor- en nadelen van de voorraadtheoretische benadering te illustreren zullen we eerst de door Tobin gebruikte methode toepassen.

Tobin's methode

In overeenstemming met het in paragraaf 3.1 geformuleerde liquiditeitsprobleem, veronderstellen we echter in tegenstelling tot Tobin:

- a. dat er niet alleen opbrengsten verkregen worden uit de belegde middelen doch ook uit de kasmiddelen;
- b. dat de kosten van een transactie verbonden aan een saldoovermeerdering in het algemeen niet gelijk zijn aan die verbonden aan een saldovermindering.

Evenals Tobin veronderstellen we dat tekorten niet toegestaan zijn, omdat het wijzigen van deze veronderstelling de resultaten onnodig gecompliceerd maakt.

Het uitgangspunt bij de probleemstelling is dat er op een bepaald tijdstip een kassaldo aanwezig is, waarmee aan de constante vraag naar kasmiddelen gedurende een periode voldaan kan worden. We stellen de lengte van deze periode gelijk aan één (tijdseenheid). De vraag per tijdseenheid is gelijk aan K . Voor het bepalen van een optimaal beleid moeten er twee vragen beantwoord worden:

1. Is het optimaal om een gedeelte van het aanwezige kassaldo te beleggen?
2. Zo ja, welke transacties moeten er dan plaatsvinden?

Voor de oplossing van het probleem definiëren we de volgende nieuwe variabelen:

R_w : netto opbrengst gedurende de periode, indien er gedurende die periode w transacties plaatsvinden;

c : opbrengst per geldeenheid in kas per tijdseenheid;

r : opbrengst per belegde eenheid per tijdseenheid ($r > c$);

t_0 : het tijdstip waarop eventueel een transactie naar korte termijnbeleggingen plaatsvindt ($t_0 = 0$);

t_1 : de fractie van de tijdseenheid gedurende welke de kasmiddelen minstens belegd moeten blijven om een opbrengst te genereren die gelijk is aan de te maken variabele transactiekosten;

t_i : het tijdstip waarop eventueel door een transactie een vermeerdering van het kassaldo plaatsvindt, met $0 < t_i < 1$ en $i = 2, 3, \dots, w$.

Uit de definitie van c en r en de definitie van h in paragraaf 2.2 volgt: $h = r - c$ en uit de definitie van t_1 volgt:

$$t_1 = \frac{b_1 + b_2}{h} \quad (5.1)$$

omdat de proportionele transactiekosten verbonden met het tijdelijk beleggen $b_1 + b_2$ per belegde geldeenheid bedragen en omdat bij een optimaal beleid de extra opbrengst door te beleggen minstens hieraan gelijk

moeten zijn. Uit (5.1) volgt dat $b_1 + b_2 < h$ een noodzakelijke voorwaarde is voor het plaatsvinden van transacties bij een optimaal beleid.

De netto opbrengst over het aan het begin van een periode beschikbare kassaldo, indien er w transacties worden uitgevoerd, wordt bepaald in bijlage D (blz. 216). Hierin wordt ook bewezen dat bij een optimaal beleid het tijdstip waarop door een transactie een vermeerdering van het kassaldo plaatsvindt, indien er in totaal w transacties worden uitgevoerd, te bepalen is uit:

$$t_i = t_1 + \frac{i-1}{w} (1-t_1), \text{ voor } i = 2, 3, \dots, w \quad (5.2)$$

Hieruit volgt dat, indien er op tijdstip nul een transactie van kas naar de korte termijnbeleggingen plaatsvindt, de belegde middelen gedurende het tijdsinterval $[t_2, 1]$ op equidistante tijdstippen en dus ook in gelijke hoeveelheden weer worden omgezet in kasgeld.

Ook blijkt dat de opbrengst bij w transacties gelijk is aan:

$$R_w = \frac{w-1}{2w} \cdot K \cdot h \cdot \left(1 - \frac{b_1+b_2}{h}\right)^2 - (a_2 + (w-1) \cdot a_1), \quad (5.3)$$

indien $w \geq 2$ en $h > b_1 + b_2$.

Om de gestelde vraag of het optimaal is een gedeelte van het aanwezige kassaldo te beleggen te beantwoorden, moeten we eerst het aantal transacties bepalen en de daarbij behorende opbrengst. Hiertoe bepalen we de marginale opbrengst voor $w \geq 2$ en $h > b_1 + b_2$ door gebruik te maken van:

$$\Delta R_w = R_{w+1} - R_w$$

Uit (5.3) volgt nu

$$\Delta R_w = \frac{K \cdot h}{2w(w+1)} \cdot \left(1 - \frac{b_1+b_2}{h}\right)^2 - a_1$$

Omdat de eerste term rechts van het gelijkteken een dalende functie van w is, welke tot nul nadert als w naar oneindig gaat, is het optimale aantal transacties, indien er transacties uitgevoerd worden, te bepalen

met behulp van de hoogste waarde van w waarvoor geldt $\Delta R_w > a_1$. Hieruit volgt:

$$\begin{aligned}
 w = 2, \text{ indien } a_1 &> \frac{1}{12} K \cdot h \left(1 - \frac{b_1 + b_2}{h}\right)^2 \\
 w = 3, \text{ indien } \frac{1}{12} K \cdot h \left(1 - \frac{b_1 + b_2}{h}\right)^2 &> a_1 > \frac{1}{24} K \cdot h \left(1 - \frac{b_1 + b_2}{h}\right)^2 \quad (5.4) \\
 w = 4, \text{ indien } \frac{1}{24} K \cdot h \left(1 - \frac{b_1 + b_2}{h}\right)^2 &> a_1 > \frac{1}{40} K \cdot h \left(1 - \frac{b_1 + b_2}{h}\right)^2
 \end{aligned}$$

etc.

Omdat de opbrengst over het kassaldo, indien er geen transacties uitgevoerd worden, gelijk is aan $R_0 = 0,5 \times K \cdot c$, kan het optimale beleid nu bepaald worden door met elkaar te vergelijken de opbrengst bij geen transacties en de opbrengst bij het aantal transacties dat uit (5.4) volgt.

Uit het voorafgaande volgt niet alleen dat $h > b_1 + b_2$ bij een optimaal beleid een noodzakelijke voorwaarde voor het plaatsvinden van transacties is, maar ook dat, gegeven $h > b_1 + b_2$, dit beleid nog afhangt van de omvang van zowel de proportionele als de vaste transactiekosten, de vraag naar kasgeld per tijdseenheid en de opbrengst over het kassaldo en de belegde middelen. Door de omvang van de genoemde probleemparameters wordt niet alleen bepaald of er een transactie plaatsvindt maar ook het aantal.

De voorraadtheoretische bepaling van de optimale transactieskas

Bij het toepassen van voorraadtheoretische benaderingen op het liquiditeitsprobleem, gebruiken we een subscript v om een onderscheid te maken tussen de beleidsparameters die gelden voor het optimale beleid zoals bepaald in hoofdstuk 3 en die welke gelden voor een voorraadtheoretische benadering:

d_v : onderste controlegrens indien die bepaald wordt door een voorraadtheoretische benadering;

D_v : onderste terugkeerpunt indien dit bepaald wordt door een voorraadtheoretische benadering.

Bovendien introduceren we een variabele Q_v voor het verschil tussen de twee beleidsparameters: $Q_v = D_v - d_v$. In een model waarin de bijsturing continu plaatsvindt is Q_v gelijk aan de transactie-omvang.

De door Baumol gebruikte voorraadtheoretische benadering van het gestelde probleem wordt verkregen door te veronderstellen, dat er geen transactiekosten verbonden zijn aan het kopen van korte termijnbeleggingen ($a_2 = 0$ en $b_2 = 0$) en dat de vraagsnelheid K geldeenheden per tijdseenheid bedraagt. Uitgaande van deze veronderstelling is het optimaal om het kassaldo door een transactie te vermeerderen als het nul geworden is ($d_v = 0$) en is het onderste terugkeerpunt ($D_v = Q_v$) te bepalen door het minimaliseren van de gemiddelde kosten per tijdseenheid:

$$C(Q_v) = a_1 \cdot K/Q_v + b_1 \cdot K + 0,5 \cdot Q_v \cdot h \quad (5.5)$$

Hierin zijn de eerste twee termen rechts van het gelijkteken respectievelijk de gemiddelde vaste en de gemiddelde variabele transactiekosten per tijdseenheid en is de derde term gelijk aan de gemiddelde voorraadkosten per tijdseenheid. Immers het gemiddeld aantal transacties per tijdseenheid bedraagt K/Q_v , de gemiddelde transactie-omvang per tijdseenheid K eenheden en de gemiddelde voorraad per tijdseenheid $0,5Q_v$ eenheden.

Differentiatie van $C(Q_v)$ naar Q_v en dit gelijk gesteld aan nul geeft:

$$Q_v = D_v = (2a_1 K/h)^{0,5} \quad (5.6)$$

Dit resultaat, dat overeenkomt met de bekende "Economic lot size" formule uit de voorraadtheorie, kan ook uit het Tobin-model, indien men $a_2 = b_2 = 0$ stelt, worden afgeleid en een groot aantal perioden in de beschouwing betreft.

Een nadeel van het gebruikmaken van de voorraadtheoretische benadering voor het oplossen van het liquiditeitsprobleem is dat er in feite alleen maar rekening gehouden wordt met de vaste transactiekosten verbonden aan het verkopen van korte termijnbeleggingen, doch niet met de andere

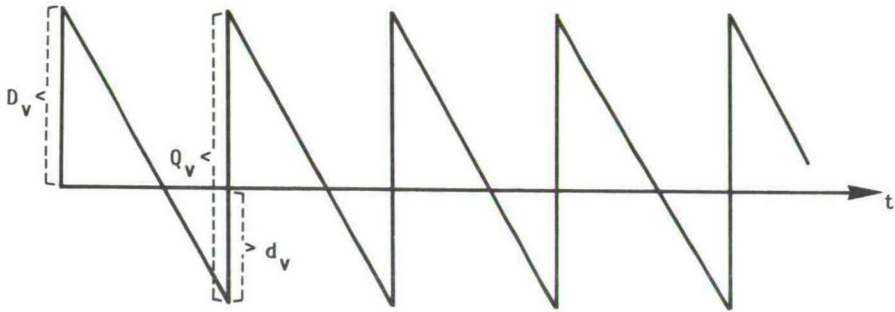
transactiekosten. Hierdoor blijft de vraag of het wel optimaal is een gedeelte van het kassaldo te beleggen buiten de beschouwing.

Een ander nadeel van het gebruik maken van een voorraadtheoretische benadering voor het liquiditeitsprobleem wordt veroorzaakt door het hierbij gebruikte kostenbegrip. Het alternatief in deze modellen is immers het continue omzetten van korte termijnbeleggingen naar kas met een snelheid die gelijk is aan die van de vraag. Maar dit alternatief is niet realistisch omdat dit tot oneindig hoge transactiekosten leidt. Bovendien heeft het werken met voorraadkosten in de financiële literatuur geleid tot onjuiste bepalingen van de beleidsparameters bij toepassing van de voorraadtheoretische benadering op liquiditeitsproblemen waarbij tekorten zijn toegestaan. De fout die hierbij gemaakt wordt door o.a. Rama Sastry (1970) en Lockyer (1973) is dat zij bij het gebruikmaken van kredietfaciliteiten geen rekening houden met het feit dat daardoor de aanwezige middelen langer belegd kunnen blijven. Door bij de bepaling van de optimale beleidsparameters uit te gaan van opbrengstmaximalisatie in plaats van kostenminimalisatie voorkomt men de genoemde problemen waar ook reeds op gewezen werd door Tobin (1956) en Wrightsman en Terninko (1971).

Om dit aan te tonen bepalen we de optimale beleidsparameters d_v en D_v , indien tekorten zijn toegestaan. Hiertoe definiëren we:

i : te betalen rente per geldeenheid tekort per tijdseenheid ($i > r$).

Op grond van de veronderstellingen ($r > c$) en ($i > r$) zal altijd gelden $d_v < 0$ en $D_v > 0$. Immers $d_v > 0$ impliceert bij continue bijsturing het onnodig aanhouden van voorraden terwijl $D_v < 0$ dan een permanent tekort tot gevolg heeft. De omvang van de transactiekas indien tekorten zijn toegestaan wordt weergegeven in figuur 5.1.



Figuur 5.1 De omvang van de transactiekas indien tekorten zijn toegestaan

De kosten per tijdseenheid, indien het weergegeven beleid over een voldoende lange periode gevoerd wordt, bedragen:

$$C(Q_v, D_v) = \frac{a_1 \cdot K}{Q_v} + b_1 \cdot K + \frac{D_v}{2} \cdot \frac{D_v}{Q_v} \cdot (r-c) + \frac{Q_v - D_v}{2} \cdot \frac{Q_v - D_v}{Q_v} \cdot (i-r) \quad (5.7)$$

Evenals in (5.5) is de som van de eerste twee termen rechts van het gelijkteken gelijk aan de gemiddelde transactiekosten per tijdseenheid. De derde term is gelijk aan de gedeelde opbrengst door het gemiddeld ter beschikking staan van $D_v/2$ geldeenheden gedurende D_v/Q_v gedeelte van een tijdseenheid. De vierde term is op een overeenkomstige wijze als de derde gelijk aan de kosten van tekort.

Minimalisatie van (5.7) geeft, indien we gebruik maken van $h = r-c$ en $s = i-r$

$$D_v = (2a_1 \cdot K \cdot s / h \cdot (h+s))^{0,5} \quad (5.8)$$

$$d_v = -(2a_1 \cdot K \cdot h / s \cdot (h+s))^{0,5} \quad (5.9)$$

$$Q_v = (2a_1 \cdot K \cdot c(h+s) / h \cdot s)^{0,5} \quad (5.10)$$

Uit een vergelijking tussen deze resultaten en (5.6) volgt dat indien er tekorten toegestaan zijn de transactie-omvang een factor $(h+s/s)^{0,5}$ groter is dan indien dit niet het geval is. Bovendien volgt eruit, dat de waarde van de beleidsparameter D_v een factor $(s/h+s)^{0,5}$ kleiner is dan indien tekorten niet zijn toegestaan, terwijl de waarde van de beleidsparameter d_v nu negatief in plaats van nul is.

5.3 Een voorraadtheoretische benadering voor het liquiditeitsbeleid; de benaderingsformules van Wagner c.s.

De belangrijkste verschillen tussen het in paragraaf 3.2 geformuleerde liquiditeitsprobleem en het liquiditeitsprobleem dat ten grondslag ligt aan de voorraadtheoretische benadering van de optimale transactiekas, zoals behandeld in paragraaf 5.2, zijn de veronderstellingen met betrekking tot de kassaldooverandering per periode en de mogelijkheid tot bijsturing. Is de kassaldooverandering in het oorspronkelijke probleem een stochastische grootheid, in het voorafgaande model is dit een deterministische grootheid. Bovendien vindt in het voorafgaande model direct bijsturing plaats op het moment dat de onderste controlegrens bereikt wordt.

Zoals reeds in de inleiding van dit hoofdstuk werd opgemerkt, wordt er in de financiële literatuur alleen maar aandacht geschonken aan een voorraadtheoretische benadering van het liquiditeitsprobleem met een stochastische kassaldooverandering en periodieke bijsturing door gebruik te maken van eenperiode-modellen waarbij bovendien de transactiekosten buiten beschouwing blijven.

Uit de resultaten van de berekeningen, gemaakt in hoofdstuk 3 welke te vinden zijn in de bijlagen I en IV (blz. 242 t/m 250 en blz. 253 t/m 260) blijkt echter het volgende:

Is de verwachte kassaldooverandering per periode groter dan nul en is de variatie-coëfficiënt relatief klein, of zijn de variabele transactiekosten relatief groot, dan wordt een optimaal beleid alleen gekarakteriseerd door de beleidsparameters d en D , of is de kans klein dat er een kassaldovermindering door middel van een transactie moet plaatsvinden, zodat het verwaarlozen van de beleidsparameters U en u nauwelijks invloed heeft op de verwachte kosten per periode. Indien de genoemde voor-

waarden gelden kan daarom een voorraadtheoretische benadering goede resultaten geven voor het liquiditeitsbeleid.

Dat er in de financiële literatuur geen aandacht geschonken wordt aan het oplossen van het discrete stochastische liquiditeitsprobleem door gebruik te maken van een voorraadtheoretische benadering is te verklaren door het feit dat ook de voorraadtheorie geen analytisch oplosbare formules voor de optimale beleidsparameters levert. Wel zijn er in de voorraadtheorie eenvoudig berekenbare benaderingsformules voor de optimale beleidsparameters beschikbaar. Door toepassing van de door Roberts (1962) en Wagner, O'Hagan en Lundh (1965) op een normale verdeling gebaseerde benaderingsformules willen we onderzoeken in hoeverre deze bruikbaar zijn voor het liquiditeitsprobleem indien de probleemparemeters aan de hiervoor vermelde eigenschappen voldoen.

Is de vraag per periode onafhankelijk en identiek normaal verdeeld dan kunnen het optimale bestelpunt (d_v) en het optimale terugkeerpunt (D_v) met de door Roberts verkregen resultaten benaderd worden door:

$$d_v = \mu + q_1 \cdot \sigma \quad (5.11)$$

$$D_v = d_v + Q_v \quad (5.12)$$

met de waarden van q_1 en Q_v gegeven door:

$$\int_{q_1}^{\infty} (w - q_1) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} w^2} dw = \frac{h \cdot Q_v}{s} \quad (5.13)$$

$$Q_v = (2a_1 \cdot \mu / h)^{0,5} \quad (5.14)$$

Als benadering voor de optimale bestelhoeveelheid wordt hierbij dus gebruik gemaakt van dezelfde optimale bestelhoeveelheid die ook uit de deterministische modellen van Baumol en Tobin volgt indien men $K = \mu$ stelt.

Het bepalen van q_1 kan gebeuren of door gebruik te maken van hiervoor beschikbare tabellen [zie bv. Wagner (1975), blz. 819] of door gebruik

te maken van een polynoom-benadering zoals door Schneider (1979, blz. 223) gegeven wordt.

Wagner, O'Hagan en Lundh (1965) hebben de geformuleerde benadering ook voor andere verdelingsfuncties en voor verschillende waarden van de probleemparemeters onderzocht. Zij komen tot de conclusie dat d_v in het algemeen een goede benadering geeft voor de optimale waarde van het bestelpunt, maar dat de door Q_v benaderde bestelhoeveelheid vaak veel groter is dan de optimale bestelhoeveelheid.

Om het laatstgenoemde probleem te ondervangen, stellen zij een heuristische beslissingsregel voor, welke zij aanduiden als de "Empirical approximation". Deze beslissingsregel is gebaseerd op de constatering dat bij een hoge verwachtingswaarde van de vraag de optimale bestelhoeveelheid zodanig is, dat er bijna iedere periode een bestelling geplaatst wordt. Wordt er iedere periode een bestelling geplaatst, dan is het optimale bestelniveau gelijk aan de optimale voorraad indien er geen transactiekosten zijn. Omdat de vraag normaal verdeeld is, is D_v te bepalen uit:

$$D_v = \mu + q_2 \cdot \sigma \quad (5.15)$$

$$\int_{-\infty}^{q_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} z^2} dz = \frac{s}{h+s} \quad (5.16)$$

In de empirische benadering wordt van de door Roberts gegeven benadering afgeweken, indien de transactie-omvang Q_v kleiner dan of gelijk is aan 1,5 maal de verwachte vraag:

$$Q_v = (2a_1 \cdot \mu/h)^{\frac{1}{2}} \leq 1,5\mu$$

hetgeen overeenkomt met:

$$a_1 \leq 1,125\mu h$$

Wagner, O'Hagan en Lundh (1965) stellen op grond van de door hen gevonden resultaten de volgende benaderingen voor de optimale beleidsparameters d_v en D_v voor:

indien $a_1 > 1,125\mu h$:

$$d_v = \mu + q_1 \cdot \sigma \quad (5.17)$$

$$D_v = d_v + Q_v \quad (5.18)$$

indien $a_1 \leq 1,125\mu h$:

$$d_v = \mu + \min(q_1, q_2) \cdot \sigma \quad (5.19)$$

$$D_v = \mu + \min(q_1 \cdot \sigma + Q_v, q_2 \cdot \sigma) \quad (5.20)$$

Evenals de optimale beleidsparameters voldoen ook de beleidsparameters die verkregen worden door gebruik te maken van de door (5.11) t/m (5.14) gegeven voorraadtheoretische benadering aan de eerste proportionaliteitseigenschap: een proportionele verandering van alle kostenparameters met dezelfde factor heeft geen invloed op de waarden van de beleidsparameters d_v en D_v .

Immers zoals uit (5.14), (5.13) en (5.16) volgt heeft een proportionele verandering van alle kostenparameters met een factor λ geen invloed op de waarden van Q_v , q_1 en q_2 en dus ook niet op d_v en D_v .

Aan de tweede voor de optimale beleidsparameters geldende proportionaliteitseigenschap wordt echter niet voldaan. Wel volgt uit (5.16) en (5.14) dat een proportionele verandering van de vaste kosten en van de parameters van de verdelingsfunctie met dezelfde factor geen invloed heeft op de waarde van q_2 noch op die van Q_v/μ , waardoor de keuze tussen (5.17) en (5.18) of (5.19) en (5.20) bepaald wordt. Maar uit (5.13) volgt dat genoemde proportionele veranderingen wel invloed hebben op q_1 , waardoor (5.17) t/m (5.20) niet meer aan de tweede proportionaliteitseigenschap voldoen.

5.4 Evaluatie van de voorraadtheoretische benadering

Voor het evalueren van het gebruiken van een voorraadtheoretische benadering van de beleidsparameters als alternatief voor het optimale beleid zijn gebruikmakend van (5.17) t/m (5.20) de beleidsparameters d_v en D_v berekend voor $\mu = 1$ en $b_1 = b_2 = 0$. De resultaten en de verwachte kosten per periode bij toepassing van de voorraadtheoretische benadering worden vermeld in tabel V.1 van bijlage V (blz. 261). Zoals verderop in deze paragraaf zal blijken, gelden de resultaten niet alleen voor $\mu = 1$ maar voor elke waarde van μ groter dan nul. Dit lijkt in strijd met de op het einde van de vorige paragraaf getrokken conclusie dat de tweede proportionaliteitseis niet geldt voor de voorraadtheoretische benadering. Op de reden waarom dit wel geoorloofd is, komen we nog terug.

Eerst zullen we onderzoeken of de gevonden waarden van de beleidsparameters een bruikbaar alternatief voor de optimale beleidsparameters vormen indien $\mu = 1$ en $b_1 = b_2 = 0$. Vervolgens corrigeren we (5.13) zodanig dat de voorraadtheoretische benadering ook aan de proportionaliteitseigenschap voldoet. Hiertoe analyseren we de absolute verschillen tussen de beleidsparameters verkregen met de voorraadtheoretische benadering en de optimale beleidsparameters. Genoemde verschillen voor $s = 3h$ worden vermeld in tabel 5.1.

$a_1=a_2$	$\sigma = 0,5\mu$		$\sigma = \mu$		$\sigma = 3\mu$	
	Δd	ΔD	Δd	ΔD	Δd	ΔD
0,1 μh	0,04	-0,00	0,37	-0,001	0,66	-0,01
μh	-0,02	-0,36	0,17	-0,28	1,83	-0,09
10 μh	-0,14	-0,28	0,00	-0,22	1,87	0,58

Tabel 5.1 Absolute verschillen tussen de benaderde en de optimale beleidsparameters voor $\mu = 1$, $s = 3h$ en $b_1 = b_2 = 0$

Zoals uit deze tabel blijkt zijn de absolute verschillen tussen de voorraadtheoretisch benaderde en de optimale beleidsparameters vrij gering

voor $\sigma = 0,5\mu$ en $\sigma = \mu$. Gegeven de resultaten in paragraaf 4.3 waaruit blijkt dat een discretisering tot op $0,2\mu$ slechts een geringe invloed heeft op de verwachte kosten per periode mogen we van de voorraadtheoretische benadering voor $\mu = 1$, $s = 3h$, $\sigma \leq \mu$ en $b_1 = b_2 = 0$ goede resultaten verwachten.

Omdat er bij een voorraadtheoretische benadering alleen maar verkopen van korte termijnbeleggingen plaatsvinden, hebben de variabele transactiekosten geen invloed op de waarden van de beleidsparameters d_v en D_v . Omdat, zoals uit de tabellen van bijlage I blijkt ook voor $\sigma = 0,5\mu$ en $\sigma = \mu$, de variabele transactiekosten nauwelijks invloed hebben op d en D mag verwacht worden dat met de voorraadtheoretische benadering goede resultaten verkregen worden voor $\mu = 1$, $s = 3h$, $\sigma \leq \mu$ en $b > 0$. Om ervoor te zorgen dat genoemde resultaten niet alleen gelden voor $\mu = 1$, doch ook voor alle μ 's groter dan nul corrigeren we (5.13) als volgt:

$$\int_{q_3}^{\infty} (w - q_3) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} w^2} dw = \frac{h \cdot Q_v}{s \cdot \mu} \quad (5.21)$$

De hieruit te berekenen q_3 voldoet zowel aan de eigenschap dat een proportionele verandering van alle kostenparameters met dezelfde factor geen invloed heeft op de waarde van q_3 als aan de eigenschap dat een proportionele verandering van de vaste transactiekosten en de parameters van de verdelingsfunctie met dezelfde factor geen invloed heeft op de waarde van q_3 .

Op grond van de in deze en in de voorafgaande paragraaf genoemde resultaten formuleren we de volgende voorraadtheoretische benadering voor het liquiditeitsprobleem:

indien $a_1 > 1,125\mu h$:

$$d_v = \mu + q_3 \cdot \sigma \quad (5.22)$$

$$D_v = d_v + Q_v \quad (5.23)$$

indien $a_1 < 1,125\mu h$:

$$d_v = \mu + \min(q_2, q_3) \cdot \sigma \quad (5.24)$$

$$D_v = \mu + \min(q_2, q_3 + Q_v/\sigma) \cdot \sigma \quad (5.25)$$

Deze beleidsparameters voldoen aan dezelfde eigenschappen waaraan ook de optimale beleidsparameters voldoen. Immers noch een proportionele verandering van alle kostenparameters met dezelfde factor, noch een proportionele verandering van de vaste transactiekosten en de parameters van de verdelingsfunctie met dezelfde factor heeft invloed op $\min(q_2, q_3)$ of $\min(q_2, q_3 + Q_v/\sigma)$.

Omdat voor $\mu = 1$ geldt dat $q_1 = q_3$ volgen uit (5.22) t/m (5.25) dezelfde resultaten voor d_v en D_v als uit (5.17) t/m (5.20). Daarom mogen we de resultaten in tabel V.1 van bijlage V generaliseren voor alle waarden van μ groter dan nul indien we bij de voorraadtheoretische benadering van het liquiditeitsprobleem gebruik maken van (5.22) t/m (5.25).

Voor het evalueren van de zojuist gegeven voorraadtheoretische benadering vergelijken we de verwachte kosten per periode bij toepassing van deze benadering met de minimaal verwachte kosten per periode bij een optimaal beleid. De verwachte kosten per periode bij een voorraadtheoretische benadering voor $b_1 > 0$ zijn eenvoudig te bepalen door de in tabel V.1 gegeven waarden voor $b_1 = 0$ te vermeerderen met $b_1 \cdot \mu$. De procentuele afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode bij toepassing van de voorraadtheoretische benadering worden gegeven in tabel V.2 van bijlage V (blz. 261) en gedeeltelijk in tabel 5.2.

Uit de resultaten blijkt dat de voorraadtheoretische benadering in de meeste gevallen beter is naarmate:

- de variatiecoëfficiënt (σ/μ) kleiner is;
- de variabele transactiekosten (b_1, b_2) groter zijn;
- de kosten van tekort (s) groter zijn.

$a_1=a_2$	$s = h$			$s = 3h$		
	$\sigma = 0,5\mu$	$\sigma = \mu$	$\sigma = 3\mu$	$\sigma = 0,5\mu$	$\sigma = \mu$	$\sigma = 3\mu$
	$b_1 = b_2 = 0$			$b_1 = b_2 = 0$		
0	0,3	5,8	77,8	0,3	4,0	54,5
0,1 μ h	0,4	4,6	73,2	0,7	3,0	53,2
μ h	9,1	2,4	52,9	1,7	2,1	40,4
10 μ h	25,4	18,3	13,6	0,5	0,1	15,2
	$b_1 = b_2 = 5h$			$b_1 = b_2 = 5h$		
0	0,0	0,0	5,6	0,0	0,0	4,1
0,1 μ h	0,0	0,2	5,6	0,1	0,0	4,1
μ h	1,6	0,4	5,7	0,4	0,5	4,4
10 μ h	9,9	7,3	1,8	0,2	0,1	3,7

Tabel 5.2 De procentuele afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode bij toepassing van de voorraadtheoretische benadering gegeven door (5.22) t/m (5.25) en $\mu > 0$

De eerste conclusie is een gevolg van het feit dat naarmate de variatiecoëfficiënt kleiner is, het liquiditeitsprobleem een grotere overeenkomst vertoont met het voorraadprobleem. Immers bij een voorraadtheoretisch beleid vindt er nooit een kassaldovermindering door een transactie plaats, terwijl de kans dat er bij een optimaal beleid door een transactie een kassaldovermindering plaatsvindt groter is naarmate de variatiecoëfficiënt groter is. Het effect van het genoemde verschil in beleid komt duidelijk tot uitdrukking in de resultaten op de eerste regel van tabel 5.2. Immers bij afwezigheid van transactiekosten zijn de verwachte kosten per periode groter bij een voorraadtheoretische benadering dan bij een optimaal beleid, omdat er bij een voorraadtheoretische benadering geen transactie uitgevoerd wordt indien het kassaldo op het beslissingsmoment groter is dan de waarde van het onderste terugkeerpunt. Bovendien is het verschil duidelijk groter naarmate de variatiecoëfficiënt groter is.

De tweede conclusie, dat de afwijking van de minimaal verwachte kosten kleiner is naarmate de proportionele transactiekosten hoger zijn, wordt veroorzaakt door twee factoren:

1. het absolute verschil daalt omdat bij hogere variabele transactiekosten het optimale beleid een grotere overeenkomst heeft met een (d,D) beleid. Immers zoals uit de tabellen in bijlage IV blijkt, heeft bij een optimaal beleid een stijging van de variabele transactiekosten een daling van de kans op een kassaldovermindering door een transactie tot gevolg;
2. het relatieve verschil wordt bij hogere variabele transactiekosten gerelateerd aan een hogere absolute waarde die veroorzaakt wordt door de hogere proportionele transactiekosten.

De derde conclusie, dat hogere kosten voor tekort tot een betere benadering leiden, ook wat absolute verschillen betreft, wordt veroorzaakt doordat de in de benaderingsformules gebruikte q_3 bepaald is op basis van de veronderstelling dat de kosten van tekort relatief groot zijn.

De in dit hoofdstuk verkregen resultaten kunnen als volgt worden samengevat: is de variatiecoëfficiënt kleiner dan één en zijn de kosten van tekort groter dan die van het in voorraad houden, dan zijn de verwachte kosten per periode bij een op de formules (5.22) t/m (5.25) gebaseerd voorraadtheoretisch beleid in veel gevallen nauwelijks hoger dan die bij een optimaal beleid, terwijl de beleidsparameters eenvoudig te bepalen zijn door gebruik te maken van in veel handboeken beschikbare tabellen.

HOOFDSTUK 6

DE LINEAIRE BESLISSINGSREGEL

6.1 Inleiding

Het evalueren van de lineaire beslissingsregel als alternatief voor een optimaal beleid is een minder voor de hand liggende mogelijkheid dan de in het vorige hoofdstuk onderzochte voorraadtheoretische benadering. Immers, kenmerkend voor de lineaire beslissingsregel is dat de beslissing (transactie-omvang) bij toepassing van deze regel op een lineaire wijze afhangt van de toestand (het kassaldo) op het moment van de beslissing, terwijl het optimale liquiditeitsbeleid duidelijk een andere structuur heeft.

Omdat we uitgaan van een liquiditeitsprobleem waarbij de kassaldoveranderingen per periode onafhankelijk en identiek normaal verdeeld zijn met als doelstellingsfunctie minimalisatie van de verwachte kosten per periode over een oneindig plantijdvak, impliceert de lineaire beslissingsregel voor het liquiditeitsprobleem dat er aan het begin van iedere periode een transactie uitgevoerd wordt, waarvan de omvang evenredig is met het verschil tussen het aanwezige kassaldo en een voorraad θ [zie hiervoor b.v. Schneeweiss (1977)].

$$v(x_t) = \kappa \cdot c(x_t - \theta), \text{ met } -1 \leq \kappa < 0 \quad (6.1)$$

Deze beslissingsregel wordt gekarakteriseerd door de twee beleidsparameters θ en κ die onafhankelijk zijn van t . Eerstgenoemde zullen we aanduiden als de normvoorraad, de tweede als de aanpassingscoëfficiënt. De waarde van de aanpassingscoëfficiënt moet negatief zijn, omdat een afwijking van de normvoorraad een tegenovergestelde correctie noodzakelijk maakt. Hij moet echter groter dan of gelijk aan -1 zijn omdat anders de voorraad na de transactie een waarde aan kan nemen die voorbij de normvoorraad ligt.

Hoewel de structuur van een lineaire beslissingsregel duidelijk afwijkt

van de structuur van een optimaal beleid, kan de lineaire beslissingsregel toch een adequaat alternatief vormen voor het optimale beleid omdat de optimale beleidsparameters van de lineaire beslissingsregel eenvoudig berekenbaar zijn en omdat deze beslissingsregel tot goede resultaten heeft geleid bij overeenkomstige problemen met een verwachtingswaarde gelijk aan nul, zoals is aangetoond door Schneeweiss (1977) en Inderfurth (1977).

De beleidsparameters van de lineaire beslissingsregel voor het te onderzoeken liquiditeitsprobleem kunnen op twee manieren bepaald worden:

- a) Omdat de lineaire beslissingsregel optimaal is voor een controleprobleem met een kwadratische doelstellingsfunctie en in dat geval de beleidsparameters expliciet bepaald kunnen worden, kunnen de beleidsparameters voor het liquiditeitsprobleem bepaald worden door de niet-kwadratische doelstellingsfunctie te benaderen door een kwadratische.
- b) Men kan ook, uitgaande van de in (3.1) geformuleerde doelstellingsfunctie, de klasse van toegelaten beslissingsregels beperken tot lineaire beslissingsregels.

De eerste methode wordt uitgewerkt in Holt, Modigliani, Muth en Simon (1960), de tweede in Schneeweiss (1975). Toepassing van de eerste methode op het liquiditeitsprobleem impliceert dat de lineaire transactiekostenfunctie (2.2) en de lineaire voorraadkostenfunctie (2.3) vervangen moeten worden door kwadratische kostenfuncties. De optimale beleidsparameters zijn dan eenvoudig te bepalen. Aan het benaderen van de lineaire kostenfuncties door kwadratische kostenfuncties zijn echter twee problemen verbonden. Niet alleen moet er een criterium gekozen worden waardoor de optimale aanpassing bepaald wordt, doch ook moet het interval waarover de aanpassing plaatsvindt overeenkomen met het realisatiegebied na de aanpassing. Voor het eerste probleem worden door Holt, Modigliani, Muth en Simon (1960) verschillende alternatieven gegeven terwijl zij voor het tweede probleem een iteratieve procedure voorstellen waardoor bereikt wordt dat de uiteindelijke aanpassing over het relevante gebied plaatsvindt.

Omdat, zoals is aangetoond door Inderfurth (1977), met de onder b) genoemde methode betere resultaten verkregen worden voor problemen waarvan de doelstellingsfunctie overeenkomt met die van het liquiditeitsprobleem, zullen we alleen deze methode verder uitwerken.

In dit hoofdstuk bespreken we de lineaire beslissingsregel als een alternatief voor het optimale beleid bij een verwachte kassaldo-verandering per periode groter dan nul. In paragraaf 6.2 bepalen we de optimale beleidsparameters, ervan uitgaande dat de klasse van toegelaten beslissingsregels beperkt is tot lineaire beslissingsregels. Zoals zal blijken heeft een verschil in vaste transactiekosten bij een verwachte kassaldo-verandering per periode ongelijk aan nul wel invloed op de waarde van de optimale aanpassingscoëfficiënt. Dit is in tegenstelling met de door Inderfurth (1977, blz. 83-88) verkregen resultaten.

Omdat de lineaire beslissingsregel, zoals in paragraaf 6.3 zal blijken, minder goede resultaten geeft indien de vaste transactiekosten relatief groot zijn, zal vervolgens in paragraaf 6.4 nagegaan worden hoe dit resultaat verbeterd kan worden door niet aan het begin van iedere periode, doch aan het begin van een veelvoud van perioden, de lineaire beslissingsregel toe te passen. Zoals zal blijken zijn de optimale beleidsparameters nu echter alleen maar eenvoudig te bepalen indien er beperkingen op de probleemparemeters gelegd worden. Ondanks deze beperkingen is de resulterende beslissingsregel, zoals in paragraaf 6.5 zal worden aangetoond, een redelijk alternatief voor het optimale beleid indien de vaste transactiekosten relatief groot zijn.

Om tot één lineaire beslissingsregel te kunnen komen als alternatief voor het optimale beleid zullen in paragraaf 6.6 de in de voorafgaande paragrafen besproken beslissingsregels gecombineerd worden tot één beslissingsregel. Deze beslissingsregel, welke we zullen aanduiden als de "optimale" lineaire beslissingsregel, wordt in paragraaf 6.7 geëvalueerd.

Bij het formuleren van de conclusies die betrekking hebben op de bruikbaarheid van lineaire beslissingsregels in paragraaf 6.8 zullen we ook de uit de literatuur bekende resultaten voor een verwachte kassaldo-verandering per periode gelijk aan nul bespreken en tevens aandacht schenken aan de bruikbaarheid van de in dit hoofdstuk geconstrueerde "optimale" lineaire beslissingsregel bij een verwachte kassaldo-verandering per periode gelijk aan nul.

6.2 Bepaling van de optimale beleidsparameters

Voor de bepaling van de optimale beleidsparameters van de lineaire beslissingsregel gaan we uit van de in hoofdstuk twee gegeven systeemvergelijking waardoor het liquiditeitsprobleem gekarakteriseerd wordt:

$$x_{t+1} = x_t + v_t - k_t \quad (6.1)$$

Uit (2.1) en (6.1) is de kasvoorraad aan het begin van een periode te bepalen als een functie van de kasvoorraad aan het begin van de voorafgaande periode, de beleidsparameters en de kassaldooverandering in de voorafgaande periode:

$$x_t = x_{t-1} + \kappa \cdot (x_{t-1} - \theta) - k_{t-1} \quad (6.2)$$

In bijlage E.1 (blz. 219) wordt aangetoond dat, uitgaande van (6.2) en gebruikmakend van $-1 \leq \kappa < 0$, de kasvoorraad aan het begin van een periode in de stationaire toestand (x_t^s) op de volgende wijze uit te drukken is als functie van alle voorafgaande kassaldooveranderingen en de parameters van de lineaire beslissingsregel:

$$x^s := \lim_{t \rightarrow \infty} x_t = \theta - k^s \quad (6.3)$$

Eveneens wordt in bijlage E.1 aangetoond dat, gebruikmakend van (6.1) en (6.3), ook de transactie-omvang in een periode in de stationaire toestand (v^s) uit te drukken is als een functie van de voorafgaande kassaldooveranderingen en de beleidsparameters:

$$v^s := \lim_{t \rightarrow \infty} v_t = -\kappa \cdot k^s \quad (6.4)$$

Omdat de twee systeemvergelijkingen (2.1) en (6.1) lineair zijn en omdat de kassaldooveranderingen per periode identiek en onafhankelijk normaal verdeeld zijn, zijn ook de toestands- en de beslissingsvariabelen als het systeem in de stationaire toestand verkeert, normaal verdeelde grootheden. Definiëren we:

$$\mu_x := E\{x^s\}$$

$$\mu_v := E\{v^s\}$$

$$\sigma_x^2 := E\{(x^s - \mu_x)^2\}$$

$$\sigma_v^2 := E\{(v^s - \mu_v)^2\},$$

dan zijn in de invariante toestand de dichtheidsfuncties van de toestands- respectievelijk de beslissingsvariabelen:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right]$$

$$f_v(v) = \frac{1}{\sigma_v \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(v - \mu_v)^2}{2\sigma_v^2}\right].$$

Uit (6.3) en (6.4) volgt dat de parameters van deze dichtheidsfuncties alleen maar afhankelijk zijn van de beleidsparameters en van de parameters van de dichtheidsfunctie van de kassaldooveranderingen per periode. De verwachtingswaarden van de toestands- en de beslissingsvariabelen als functies van de genoemde grootheden zijn:

$$\mu_x = \theta - \mu \sum_{j=0}^{\infty} (\kappa+1)^j = \theta + \frac{\mu}{\kappa} \quad (6.5)$$

$$\mu_v = -\kappa \cdot \mu \sum_{j=0}^{\infty} (\kappa+1)^j = \mu \quad (6.6)$$

Gebruikmakend van (6.5) kan de lineaire beslissingsregel (6.1) nu ook geschreven worden als:

$$v_t = \kappa \cdot (x_t - \mu_x) + \mu, \text{ met } -1 < \kappa < 0 \quad (6.7)$$

Hieruit volgt dat de omvang van een transactie aan het begin van een periode gelijk is aan de verwachte kassaldooverandering per periode plus het produkt van de aanpassingscoëfficiënt en het verschil tussen de aanwezige kasvoorraad en de verwachtingswaarde van de kasvoorraad in de stationaire toestand.

Uit (6.5) volgt dat de verwachtingswaarde van de kasvoorraad op het einde van een periode alleen maar dan gelijk is aan de normvoorraad als de verwachte kassaldooverandering per periode gelijk is aan nul. Uit (6.6) volgt dat de verwachtingswaarde van de transactie-omvang gelijk is aan de verwachte kassaldooverandering per periode.

Gebruikmakend van de verkregen resultaten en de eigenschap dat de kassaldooveranderingen in twee verschillende perioden onafhankelijk verdeeld zijn, kunnen ook de varianties van de invariante verdelingen bepaald worden als functies van de beleidsparameters en de parameters van de kansverdeling van de kassaldooverandering per periode:

$$\sigma_x^2 = \sum_{j=0}^{\infty} (\kappa+1)^{2j} \cdot \sigma^2 = \frac{-\sigma^2}{\kappa(\kappa+2)} \quad (6.8)$$

$$\sigma_v^2 = \kappa^2 \sum_{j=0}^{\infty} (\kappa+1)^{2j} \cdot \sigma^2 = \frac{-\kappa \cdot \sigma^2}{\kappa+2} \quad (6.9)$$

Hieruit blijkt dat zowel de variantie van de invariante verdeling van de toestandsvariabelen als van de beslissingsvariabelen alleen afhankelijk is van de aanpassingscoëfficiënt en de variantie van de kassaldooveranderingen per periode. De varianties zijn dus onafhankelijk van de normvoorraad en de verwachte kassaldooverandering per periode.

Voor de bepaling van de optimale waarden van de beleidsparameters zijn de verwachte kosten per periode van belang. De verwachte kosten per periode bij toepassing van de lineaire beslissingsregel (C_L) bestaan uit de verwachte voorraadkosten per periode (C_{VL}) en de verwachte transactiekosten per periode (C_{TL}):

$$C_L = C_{VL} + C_{TL} \quad (6.10)$$

met:

$$C_{VL} = \int_{-\infty}^{\infty} V(x) \cdot f_x(x) dx \quad (6.11)$$

$$C_{TL} = \int_{-\infty}^{\infty} T(v) \cdot f_v(v) dv \quad (6.12)$$

In bijlage E.2 (blz. 220) wordt aangetoond dat na substitutie van (2.3) en (2.2) respectievelijk in (6.11) en (6.12), deze formules geschreven kunnen worden als:

$$C_{VL} = (h+s) \left[\mu_x \cdot \Phi\left(\frac{\mu_x}{\sigma_x}\right) + \sigma_x \cdot \phi\left(\frac{\mu_x}{\sigma_x}\right) \right] - s \cdot \mu_x \quad (6.13)$$

$$C_{TL} = a_2 - (a_2 - a_1) \cdot \Phi\left(\frac{\mu_v}{\sigma_v}\right) - b_2 \cdot \mu_v +$$

$$(b_1 + b_2) \left[\mu_v \cdot \Phi\left(\frac{\mu_v}{\sigma_v}\right) + \sigma_v \cdot \phi\left(\frac{\mu_v}{\sigma_v}\right) \right] \quad (6.14)$$

waarin $\phi(\cdot)$ de dichtheidsfunctie en $\Phi(\cdot)$ de verdelingsfunctie is van een gestandaardiseerde normaal verdeelde variabele:

$$\phi(z) := (2\pi)^{-0,5} \exp(-0,5 z^2)$$

$$\Phi(z) := (2\pi)^{-0,5} \int_{-\infty}^z \exp(-0,5 w^2) dw \quad (6.15)$$

en bovendien geldt dat:

$$\Phi\left(\frac{\mu_x}{\sigma_x}\right) = P[x^s > 0] \text{ en } \Phi\left(\frac{\mu_v}{\sigma_v}\right) = P[v^s > 0] \quad (6.16)$$

Door (6.13) en (6.14) worden de verwachte kosten per periode beschreven als functies van de probleemparemeters en de parameters van de invariante verdelingen. Omdat de verwachte voorraad alleen een functie van de normvoorraad en de aanpassingscoëfficiënt is, de varianties van de voorraad en de transactie-omvang alleen functies zijn van de aanpassingscoëfficiënt en omdat de verwachtingswaarde van de transactie-omvang on-

afhankelijk is van de beleidsparameters, kunnen de invloeden van veranderingen in de beleidsparameters bepaald worden uit:

$$\frac{\partial C_L}{\partial \theta} = \frac{\partial C_L}{\partial \mu_x} \cdot \frac{\partial \mu_x}{\partial \theta} \quad (6.17)$$

$$\frac{\partial C_L}{\partial \kappa} = \frac{\partial C_L}{\partial \mu_x} \cdot \frac{\partial \mu_x}{\partial \kappa} + \frac{\partial C_L}{\partial \sigma_x^2} \cdot \frac{d\sigma_x^2}{d\kappa} + \frac{\partial C_L}{\partial \sigma_v^2} \cdot \frac{d\sigma_v^2}{d\kappa} \quad (6.18)$$

Omdat alleen de verwachte voorraadkosten afhankelijk zijn van de normvoorraad volgt uit (6.13) en (6.5):

$$\frac{\partial C_L}{\partial \mu_x} = (h+s) \cdot \Phi\left(\frac{\mu_x}{\sigma_x}\right) - s \quad (6.19)$$

$$\frac{\partial \mu_x}{\partial \theta} = 1 \quad (6.20)$$

Zodat de normvoorraad optimaal is indien:

$$\Phi\left(\frac{\mu_x}{\sigma_x}\right) = \frac{s}{h+s} \quad (6.21)$$

Aan deze voorwaarde wordt voldaan indien de normvoorraad en de aanpassingscoëfficiënt zodanig gekozen worden dat de kans, dat de voorraad op het einde van een periode groter dan nul is, gelijk is aan: $s/(h+s)$; zie (6.16).

Door formule (6.18) wordt de invloed van een verandering in de aanpassingscoëfficiënt op de verwachte kosten per periode weergegeven. Omdat de aanpassingscoëfficiënt altijd negatief is heeft een vermeerdering van de aanpassingscoëfficiënt een daling in absolute waarde van deze coëfficiënt tot gevolg. Omdat het beter bij de economische probleemstelling aansluit zullen we in het vervolg een vermeerdering van de aanpassingscoëfficiënt aanduiden als een verminderde aanpassing.

Wordt aan voorwaarde (6.21) voldaan dan is de eerste term rechts van het gelijkteken in (6.18) gelijk aan nul. Omdat de afgeleide van de verwach-

te voorraadkosten naar 0 nul is, wanneer aan (6.21) is voldaan en deze kosten niet afhangen van de variantie van de transactie-omvang geeft de tweede term rechts van het gelijkteken in (6.18) de invloed van een marginale verandering in de aanpassingscoëfficiënt op de verwachte voorraadkosten. Deze invloed is door differentiatie van (6.13) naar de variantie van de toestandsvariabele en van (6.8) naar de aanpassingscoëfficiënt te bepalen uit:

$$\frac{\partial C_L}{\partial \sigma_x^2} = \frac{h+s}{2\sigma_x} \cdot \phi\left(\frac{\mu_x}{\sigma_x}\right) \quad (6.22)$$

$$\frac{d\sigma_x^2}{d\kappa} = \frac{2 \cdot (\kappa+1) \cdot \sigma^2}{\kappa^2 \cdot (\kappa+2)^2} \quad (6.23)$$

Uit (6.23) volgt dat een verminderde aanpassing leidt tot een grotere variantie van de toestandsvariabele en uit (6.22) volgt dat een grotere variantie van de toestandsvariabele hogere verwachte voorraadkosten tot gevolg heeft. Zodat uit het produkt van (6.22) en (6.23) volgt in hoeverre bij gedeeltelijke aanpassing een verminderde aanpassing aan de normvoorraad aan het begin van een periode hogere verwachte voorraadkosten tot gevolg heeft.

Omdat de verwachte transactiekosten per periode alleen via de variantie van de transactie-omvang van de aanpassingscoëfficiënt afhankelijk zijn, geeft de derde term van (6.18) de invloed van een verandering in de aanpassing op de verwachte transactiekosten weer. Deze invloed is door differentiatie van (6.9) naar de aanpassingscoëfficiënt en (6.14) naar de variantie van de transactie-omvang te bepalen uit:

$$\frac{\partial C_L}{\partial \sigma_v^2} = \frac{(a_2 - a_1) \cdot \mu_v + (b_1 + b_2) \cdot \sigma_v^2}{2\sigma_v^3} \cdot \phi\left(\frac{\mu_v}{\sigma_v}\right) \quad (6.24)$$

$$\frac{d\sigma_v^2}{d\kappa} = \frac{-2 \cdot \sigma^2}{(\kappa+2)^2} \quad (6.25)$$

Formule (6.25) geeft de vermindering van de variantie van de transactie-omvang bij een verminderde aanpassing. De invloed van een kleinere variantie op de verwachte (transactie)kosten per periode is zoals uit (6.24) blijkt niet eenduidig te bepalen omdat de teller van (6.24) zowel positief als negatief kan zijn.

Voor het bepalen van de noodzakelijke voorwaarden waaraan de probleemparemeters moeten voldoen zodat een gedeeltelijke aanpassing optimaal is, definiëren we:

$$\ell(\kappa) := \frac{\partial C_L}{\partial \sigma_x^2} \cdot \frac{d\sigma_x^2}{d\kappa} + \frac{\partial C_L}{\partial \sigma_v^2} \cdot \frac{d\sigma_v^2}{d\kappa}$$

Door hierin eerst (6.22) t/m (6.25) te substitueren en vervolgens gebruik te maken van (6.5), (6.6), (6.8), (6.9) en (6.21) krijgt men:

$$\begin{aligned} \ell(\kappa) = & \frac{(h+s)(\kappa+1) \cdot \sigma \cdot \exp[-0,5(\Phi^{-1}(\frac{s}{h+s}))^2]}{[-\kappa(\kappa+2)]^{1,5} \cdot (2\pi)^{0,5}} \\ & - \left[\frac{(a_2 - a_1) \cdot \mu}{(-\kappa)^{1,5} \cdot (\kappa+2)^{0,5} \cdot \sigma} + \frac{(b_1 + b_2) \cdot \sigma}{(\kappa+2)^{1,5} (-\kappa)^{0,5}} \right] \cdot (2\pi)^{-0,5} \cdot \exp[\frac{\kappa+2}{2\kappa} (\frac{\mu}{\sigma})^2] \end{aligned} \quad (6.26)$$

Uit (6.26) volgt dat, gegeven (6.21), een gedeeltelijke aanpassing optimaal is indien de marginale invloed van een verandering in de aanpassingscoëfficiënt op de verwachte voorraadkosten per periode (eerste term rechts van het gelijkteken) gelijk is aan de marginale invloed van een verandering in de aanpassingscoëfficiënt op de verwachte transactiekosten per periode (tweede term rechts van het gelijkteken).

Omdat bij een gedeeltelijke aanpassing de eerste term altijd positief is, moet voor het optimaal zijn van een gedeeltelijke aanpassing de tweede term negatief zijn. Hieraan wordt voldaan indien geldt:

$$(a_2 - a_1) \cdot \mu + (b_1 + b_2) \cdot \sigma^2 > 0$$

In bijlage E.3 (blz. 221) wordt bewezen dat onder deze voorwaarde een κ , waarvoor geldt $-1 < \kappa < 0$, te vinden is die aan de noodzakelijke voorwaarde voldoet. Ook wordt hierin bewezen dat er bij een optimaal beleid altijd een volledige aanpassing plaatsvindt indien geldt:

$$(a_2 - a_1) \cdot \mu + (b_1 + b_2) \cdot \sigma^2 < 0$$

Aan de eerste voorwaarde wordt onder andere voldaan indien er proportionele transactiekosten zijn en de verwachte kassaldoverandering gelijk aan nul is of de vaste transactiekosten verbonden aan een kassaldovermeerdering gelijk zijn aan die verbonden aan een kassaldovermindering.

Aan de tweede voorwaarde wordt onder andere voldaan indien er geen proportionele transactiekosten zijn en de verwachte kassaldoverandering per periode gelijk aan nul is of de vaste transactiekosten verbonden aan een kassaldovermeerdering gelijk zijn aan die verbonden aan een kassaldovermindering.

Uit het voorafgaande volgt dat de optimale aanpassingscoëfficiënt afhankelijk is van het verschil in de vaste transactiekosten verbonden aan een kassaldovermindering en die verbonden aan een kassaldovermeerdering. Dit is in tegenstelling met de resultaten van Inderfurth (1977) waarin de optimale aanpassingscoëfficiënt en dientengevolge ook de optimale normvoorraad onafhankelijk zijn van de vaste transactiekosten.

Dat de optimale aanpassingscoëfficiënt wel degelijk afhankelijk is van de vaste transactiekosten is eenvoudig in te zien. Immers bij een verwachte kassaldoverandering per periode groter dan nul heeft een verminderde aanpassing een grotere kans op een transactie waarbij een kassaldovermeerdering optreedt tot gevolg en daalt dientengevolge de kans op een transactie waarbij een kassaldovermindering optreedt. Omdat de verwachte vaste transactiekosten per periode gelijk zijn aan: $P[v > 0] \cdot a_1 + P[v < 0] \cdot a_2$, zullen de verwachte vaste transactiekosten per periode dalen bij een verminderde aanpassing indien $a_2 > a_1$ en stijgen indien geldt: $a_1 > a_2$. Het tegenovergestelde gebeurt bij een verwachte kassaldoverandering per periode kleiner dan nul.

Dat, zoals eveneens uit (6.26) volgt, de invloed van een marginale verandering in de aanpassingscoëfficiënt op de verwachte transactiekosten afhankelijk is van de som van de proportionele transactiekosten verbonden

den met een kassaldovermeerdering en een kassaldovermindering en dat een verminderde aanpassing leidt tot lagere verwachte proportionele transactiekosten per periode, is als volgt verklaarbaar. Omdat een transactie in dezelfde richting als de verwachte kassaldoverandering een transactie van gelijke omvang in de tegenovergestelde richting als de verwachte kassaldoverandering per periode noodzakelijk maakt, zijn de verwachte proportionele transactiekosten ook afhankelijk van de som van de variabele transactiekostencoëfficiënten. Omdat bij een verminderde aanpassing de kans op een transactie in dezelfde richting als de verwachte kassaldoverandering en de daarbij behorende gemiddelde omvang daalt, zullen de verwachte variabele transactiekosten dalen bij een vermindering van de aanpassing.

In deze paragraaf is gebleken dat de optimale beleidsparameters van de lineaire beslissingsregel zowel eenduidig als relatief eenvoudig te berekenen zijn. Daarom onderzoeken we in de volgende paragraaf de bruikbaarheid van de lineaire beslissingsregel als een alternatief voor het optimale beleid.

6.3 De lineaire beslissingsregel als alternatief voor de optimale strategie

Voor het evalueren van de lineaire beslissingsregel als een alternatief voor de optimale strategie bepalen we eerst de proportionaliteitseigenschappen van de optimale beleidsparameters van de lineaire beslissingsregel. Vervolgens onderzoeken we de overeenkomsten en de verschillen tussen de relevante grootheden van de lineaire beslissingsregel en de optimale strategie. Ten slotte bepalen we de procentuele afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode bij toepassing van de lineaire beslissingsregel.

Evenals voor de optimale beleidsparameters kunnen er ook proportionaliteitseigenschappen worden afgeleid voor de beleidsparameters van de lineaire beslissingsregel. Door vermenigvuldiging van de relevante probleemparameters in (6.26) met een factor $\lambda > 0$, is de volgende eigenschap af te leiden:

Eigenschap 6.1 Een proportionele verandering van de kostenparameters met een factor λ heeft geen invloed op de optimale waarde van de aanpassingscoëfficiënt. Ook heeft een proportionele verandering van de vaste transactiekosten, de verwachting en de standaardafwijking met een factor λ geen invloed op de optimale aanpassingscoëfficiënt:

$$\kappa(\lambda h, \lambda s, \lambda a_1, \lambda a_2, \lambda b_1, \lambda b_2, \mu, \sigma) = \kappa(h, s, a_1, a_2, b_1, b_2, \mu, \sigma)$$

$$\kappa(h, s, \lambda a_1, \lambda a_2, b_1, b_2, \lambda \mu, \lambda \sigma) = \kappa(h, s, a_1, a_2, b_1, b_2, \mu, \sigma)$$

Uit (6.21) volgt dat een proportionele verandering van de twee parameters van de voorraadkostenfunctie geen invloed heeft op de optimale waarde van μ_x / σ_x . Bovendien heeft een proportionele verandering van de andere probleemparameters hierop ook geen invloed. Door substitutie van (6.5) en (6.8) in (6.21) en gebruikmakend van eigenschap 6.1 volgt nu:

Eigenschap 6.2 Een proportionele verandering van de kostenparameters met een factor λ heeft geen invloed op de waarde van de optimale normvoorraad. Wel heeft een proportionele verandering van de vaste transactiekosten, de verwachting en de standaardafwijking met een factor λ dezelfde proportionele verandering van de optimale normvoorraad tot gevolg:

$$\theta(\lambda h, \lambda s, \lambda a_1, \lambda a_2, \lambda b_1, \lambda b_2, \mu, \sigma) = \theta(h, s, a_1, a_2, b_1, b_2, \mu, \sigma)$$

$$\theta(h, s, \lambda a_1, \lambda a_2, b_1, b_2, \lambda \mu, \lambda \sigma) = \lambda \cdot \theta(h, s, a_1, a_2, b_1, b_2, \mu, \sigma)$$

De invloed van een proportionele verandering van de relevante probleemparameters op de verwachte kosten per periode bij toepassing van de lineaire beslissingsregel met de optimale beleidsparameters kan gebruikmakend van de eigenschap 6.1 en 6.2 en (6.5) t/m (6.9) bepaald worden uit (6.13) en (6.14):

Eigenschap 6.3 Een proportionele verandering van alle kostenparameters met een factor λ leidt tot dezelfde verandering van de verwachte kosten per periode. Eveneens leidt een proportionele verandering van de vaste transactiekosten, de verwachting en de standaardafwijking met een factor λ tot dezelfde proportionele verandering van de verwachte kosten per periode:

$$C_L(\lambda h, \lambda s, \lambda a_1, \lambda a_2, \lambda b_1, \lambda b_2, \mu, \sigma) = \lambda \cdot C_L(h, s, a_1, a_2, b_1, b_2, \mu, \sigma)$$

$$C_L(h, s, \lambda a_1, \lambda a_2, b_1, b_2, \lambda \mu, \lambda \sigma) = \lambda \cdot C_L(h, s, a_1, a_2, b_1, b_2, \mu, \sigma)$$

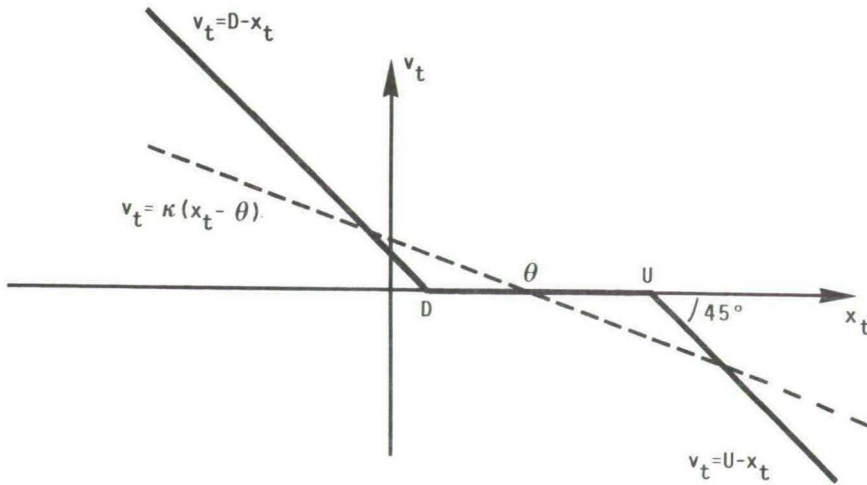
Uit de proportionaliteitseigenschappen 6.1 t/m 6.3 volgt nu dat de normvoorraad en de verwachte kosten per periode bij toepassing van de lineaire beslissingsregel aan dezelfde eigenschappen voldoen als de beleidsparameters en de verwachte kosten per periode bij een optimaal beleid. Op grond hiervan mogen we dus de met een bepaalde waarde voor μ en h verkregen resultaten generaliseren.

Is de verwachte kassaldooverandering per periode gelijk aan nul dan is, zoals uit (6.26) volgt, de optimale aanpassingscoëfficiënt onafhankelijk van de vaste transactiekosten en de standaardafwijking. Bovendien is de normvoorraad daardoor onafhankelijk van de vaste transactiekosten.

De optimale waarden van de beleidsparameters en de verwachte kosten per periode, indien de vaste transactiekosten gelijk aan nul zijn, staan vermeld in tabel VI.1 van bijlage VI (blz. 263). De resultaten voor vaste transactiekosten ongelijk aan nul zijn hieruit eenvoudig te bepalen, indien de vaste transactiekosten aan elkaar gelijk zijn. Immers dan hebben zij geen invloed op de waarden van de optimale beleidsparameters en zijn de verwachte kosten per periode $(a_1 + a_2)/2$ hoger dan wanneer er geen vaste transactiekosten zijn.

Voordat we de resultaten uit de berekeningen bespreken, analyseren we eerst het verschil tussen de twee beleidsstructuren.

We vergelijken de parameters van de lineaire beslissingsregel met die van een optimaal (D,U)-beleid voor combinaties van probleemparameters waarbij de vaste transactiekosten gelijk zijn aan 0. Het verschil tussen de twee beleidsstructuren kan grafisch worden weergegeven als in figuur 6.1.



Figuur 6.1 Een (D,U)-beleid vergeleken met de lineaire beslissingsregel

Zijn er geen kosten aan een transactie verbonden, dus $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$, dan volgt uit (6.26) dat de optimale waarde van de aanpassingscoëfficiënt κ gelijk is aan -1 ; verder heeft de optimale normvoorraad dezelfde waarde als de twee samenvallende terugkeerpunten. Het optimale beleid is dan dus bij beide beslissingsregels aan elkaar gelijk.

Zijn er alleen proportionele transactiekosten en geldt bovendien $D < \theta < U$ dan is, zoals uit figuur 6.1 blijkt, de optimale transactie-omvang bij beide beslissingsregels gelijk indien geldt: $\kappa \cdot c(x_t - \theta) = D - x_t$, $x_t = \theta$ of $\kappa \cdot c(x_t - \theta) = U - x_t$. Is de waarde van het kassaldo aan het begin van een periode gelegen tussen de beide buitenste snijpunten, dan is de transactie-omvang bij gebruik van de lineaire beslissingsregel groter dan bij een optimaal beleid. Heeft het kassaldo aan het begin van een periode een andere waarde dan geldt het tegenovergestelde.

Een vermeerdering van de proportionele transactiekosten heeft bij een optimaal beleid tot gevolg dat de afstand tussen de twee terugkeerpunten groter wordt. Bij de lineaire beslissingsregel met alleen proportionele transactiekosten wordt dan de aanpassing minder. Hieruit volgt dat in de meeste gevallen, zowel bij een optimaal beleid als bij de lineaire beslissingsregel de verwachting van de transactie-omvang kleiner wordt als

de proportionele kosten verbonden aan een transactie stijgen.

Door gebruik te maken van de in bijlage I, IV en VI vermelde resultaten is het verband tussen de besproken grootheden te bepalen. Een voorbeeld hiervan voor $s = h$, $a_1 = a_2 = 0$ en $\sigma = 3\mu$ wordt gegeven in tabel 6.1.

$b_1=b_2$	κ	θ	$E\{ v \}$	D	U	$E\{ v \}$
0	-1,00	1,00 μ	2,52 μ	1,00 μ	1,00 μ	2,52 μ
h	-0,54	1,86 μ	1,67 μ	0,90 μ	2,96 μ	1,41 μ
5h	-0,23	4,29 μ	1,21 μ	0,89 μ	10,95 μ	1,05 μ
10h	-0,16	6,25 μ	1,12 μ	0,89 μ	20,95 μ	1,00 μ

Tabel 6.1 De optimale waarden van de beleidsparameters en de verwachting van de transactie-omvang bij toepassing van de lineaire en de optimale beslissingsregel voor $s = h$, $a_1 = a_2 = 0$, $\sigma = 3\mu$ en $\mu > 0$

Zoals uit tabel 6.1 blijkt is de verwachtingswaarde van de absolute transactie-omvang indien er proportionele transactiekosten zijn bij de lineaire beslissingsregel ca 10-20% hoger. Dientengevolge zullen ook de verwachte transactiekosten bij toepassing van de lineaire beslissingsregel 10-20% hoger zijn.

Zijn er wel vaste kosten aan een transactie verbonden dan heeft dit geen invloed op de waarden voor de lineaire beslissingsregel, doch wel op die van het optimale beleid. Met name wordt dan de verwachtingswaarde van de absolute transactie-omvang kleiner.

De consequenties van de verschillen in beleid voor de verwachte kosten per periode zijn uit de in de bijlagen IV en VI (blz. 253 t/m 260 en blz. 263) vermelde resultaten te bepalen. Een voorbeeld hiervan wordt voor $s = h$, $a_1 = a_2 = 0$ en $a_1 = a_2 = \mu h$ gegeven in tabel 6.2.

$b_1=b_2$	$\sigma = 0,5\mu$	$\sigma = \mu$	$\sigma = 3\mu$	$\sigma = 0,5\mu$	$\sigma = \mu$	$\sigma = 3\mu$
	$a_1 = a_2 = 0$			$a_1 = a_2 = \mu h$		
0	0,0	0,0	0,0	30,7	33,3	13,9
h	0,6	3,0	4,9	16,2	23,0	18,3
5h	0,4	3,1	11,8	5,7	10,5	19,3
10h	0,3	2,2	12,4	5,2	6,4	17,3

Tabel 6.2 De procentuele afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode bij een op de lineaire beslissingsregel gebaseerd beleid voor $s = h$ en $\mu > 0$

Hieruit blijkt dat indien er geen vaste transactiekosten zijn de lineaire beslissingsregel een goed alternatief is voor het optimale beleid. De resultaten zijn beter naarmate de variatiecoëfficiënt kleiner is.

Zijn er wel vaste transactiekosten dan is, zoals ook uit tabel 6.2 blijkt, de lineaire beslissingsregel een minder aantrekkelijk alternatief voor het optimale beleid. De resultaten zijn i.h.a. minder naarmate de vaste transactiekosten groter zijn.

Dat hoge vaste transactiekosten tot veel hogere verwachte kosten per periode leiden bij toepassing van de lineaire beslissingsregel dan bij toepassing van een optimaal beleid wordt veroorzaakt door het feit dat bij de lineaire beslissingsregel een transactie aan het begin van iedere periode uitgevoerd wordt ongeacht de omvang van de vaste transactiekosten.

6.4 Toepassing van de lineaire beslissingsregel bij vaste transactiekosten

Om er voor te zorgen dat de lineaire beslissingsregel bij relatief hoge vaste transactiekosten een adequaat alternatief kan vormen voor de optimale beslissingsregel moeten wij afstappen van de veronderstelling dat er aan het begin van iedere periode een transactie wordt uitgevoerd. Dit is te bereiken door de lineaire beslissingsregel niet toe te passen aan

het begin van iedere periode, doch aan het begin van een veelvoud van perioden, waarbij dit veelvoud afhankelijk gesteld wordt van de omvang van de vaste transactiekosten.

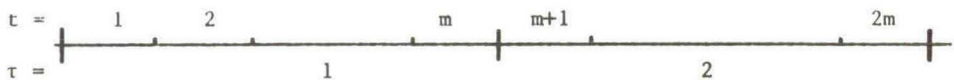
Voor het formuleren van een lineaire beslissingsregel die toepasbaar is aan het begin van een veelvoud van perioden introduceren we het begrip beslissingsperiode en een nieuwe beslissingsvariabele m . Een beslissingsperiode bestaat uit m tijdsperioden. Alleen aan het begin van een beslissingsperiode wordt er een transactie uitgevoerd overeenkomstig de lineaire beslissingsregel. Noteren we de aanpassingscoëfficiënt en de normvoorraad die behoren bij de lineaire beslissingsregel met variabele beslissingsperiode als κ_m en θ_m dan geldt de volgende beslissingsregel aan het begin van een tijdsperiode t (dus op tijdstip $t-1$):

$$v_t = \kappa_m \cdot (x_{t-m} - \theta_m), \quad \text{met } -1 < \kappa_m < 0; \text{ voor } t = 1, 1+m, 1+2m, \dots$$

$$= 0, \quad \text{elders}$$
(6.27)

Voor $m = 1$ is de beslissingsregel hetzelfde als (6.1). Voor $m > 1$ moeten we voor de bepaling van de optimale waarden van de beleidsparameters een onderscheid maken tussen de variabelen die betrekking hebben op een beslissingsperiode en die betrekking hebben op een tijdsperiode.

Hiertoe introduceren we een subscript τ om aan te geven dat betreffende variabele betrekking heeft op de τ -de beslissingsperiode. Het verband tussen t en τ kan grafisch worden weergegeven als in figuur 6.2.



Figuur 6.2 Het verband tussen de subscripten voor de periode t en τ

Het verband tussen de subscripten kan ook worden weergegeven door:

$$t = i + m \cdot (\tau - 1) \quad \tau = 1, 2, \dots$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$
(6.28)

Definiëren we voor de bepaling van de optimale waarden van de beleidsparameters:

$x_{m,\tau}$: de kasgeldvoorraad aan het begin van de $(\tau+1)$ -ste beslissingsperiode, dus op tijdstip τ ;

$v_{m,\tau}$: de transactie-omvang aan het begin van de $(\tau+1)$ -ste beslissingsperiode, dus op tijdstip τ ;

$k_{m,\tau}$: de kassaldooverandering gedurende de τ -de beslissingsperiode;
dan geldt het volgende verband tussen de beginsaldo's op twee opeenvolgende beslissingstijdstippen:

$$x_{m,\tau} = x_{m,\tau-1} + v_{m,\tau-1} - k_{m,\tau} \quad , \quad \tau = 1, 2, \dots \quad (6.29)$$

met:

$$k_{m,\tau} = \sum_{i=1}^m k_{(\tau-1)m+i} \quad , \quad \tau = 1, 2, \dots \quad (6.30)$$

en wordt de beslissingsregel:

$$v_{m,\tau} = \kappa_m \cdot (x_{m,\tau} - \theta_m) \quad , \quad \tau = 1, 2, \dots \quad (6.31)$$

Omdat de kassaldooveranderingen per periode identiek en onafhankelijk normaal verdeeld zijn is de kassaldooverandering per beslissingsperiode identiek en onafhankelijk normaal verdeeld met verwachtingswaarde $m \cdot \mu$ en variantie $m \cdot \sigma^2$. Overeenkomstig (6.5) t/m (6.9) geldt nu:

$$\mu_{m,x} := E\{x_m^s\} = \theta_m + \frac{1}{\kappa_m} \cdot m \cdot \mu \quad (6.32)$$

$$\mu_{m,v} := E\{v_m^s\} = m \cdot \mu \quad (6.33)$$

$$\sigma_{m,x}^2 := E\{(x_m^s - \mu_{m,x})^2\} = \frac{-m \cdot \sigma^2}{\kappa_m \cdot (\kappa_m + 2)} \quad (6.34)$$

$$\sigma_{m,v}^2 := E\{(v_m^s - \mu_{m,v})^2\} = \frac{-m \cdot \kappa_m \cdot \sigma^2}{(\kappa_m + 2)} \quad (6.35)$$

Omdat een beslissingsperiode in het algemene geval uit meer dan één tijdsperiode bestaat zijn de voorraadkosten per beslissingsperiode niet

alleen afhankelijk van het saldo op het einde van de beslissingsperiode, doch ook van de saldo's op het einde van de tussenliggende tijdsperioden.

Gebruikmakend van (6.28) kan de volgende relatie tussen de toestandsvariabelen op het einde van een beslissingsperiode en die op het einde van de voorafgaande tijdsperioden afgeleid worden:

$$x_{m,\tau} = x_{\tau m} = x_{(\tau-1)m+i} - \sum_{j=1}^{m-1} k_{(\tau-1)m+1+j} \quad (6.36)$$

$$\tau = 0, 1, \dots$$

$$i = 0, 1, \dots, m-1$$

Indien we $x_i^s(m)$ definiëren als de toestandsvariabele, in de stationaire toestand, aan het einde van de i -de periode na een beslissingstijdstip bij een periodiciteit van m dan volgt in de voorafgaande paragraaf nu uit (6.32), (6.33) en (6.36) dat de invariante verdeling van de toestandsvariabelen op het einde van een tijdsperiode normaal is met verwachtingswaarde $\mu_i(m)$ en variantie $\sigma_i^2(m)$ respectievelijk:

$$\mu_i(m) := E\{x_i^s(m)\} = \mu_{m,x} + (m-i)\mu = (\frac{m}{\kappa} + m - i)\mu + \theta_m, \quad (6.37)$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sigma_i^2(m) := E\{(x_i^s(m) - \mu_i(m))^2\} = \sigma_{m,x}^2 - (m-i)\sigma^2 = \frac{-m \cdot \sigma^2}{\kappa_m \cdot (\kappa_m + 2)} - (m-i)\sigma^2, \quad (6.38)$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

De verwachte voorraadkosten per periode bedragen overeenkomstig (6.13):

$$(h+s) \left[(\mu_i(m) \cdot \phi\left(\frac{\mu_i(m)}{\sigma_i(m)}\right) + \sigma_i(m) \cdot \phi\left(\frac{\mu_i(m)}{\sigma_i(m)}\right)) \right] - s \cdot \mu_i(m)$$

zodat de gemiddelde verwachte voorraadkosten per tijdsperiode bij toepassing van een lineaire beslissingsregel waarbij om de m perioden be-

slist wordt ($C_{VL(m)}$) gelijk zijn aan:

$$C_{VL(m)} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left\{ (1+s) \left[\mu_i(m) \cdot \Phi\left(\frac{\mu_i(m)}{\sigma_i(m)}\right) + \sigma_i(m) \cdot \phi\left(\frac{\mu_i(m)}{\sigma_i(m)}\right) \right] - s \cdot \mu_i \right\} \quad (6.39)$$

De gemiddelde verwachte transactiekosten per tijdsperiode ($C_{TL(m)}$) bedragen overeenkomstig (6.14):

$$\begin{aligned} C_{TL(m)} = & \frac{1}{m} \left\{ a_2 - (a_2 - a_1) \Phi\left(\frac{\mu_{m,v}}{\sigma_{m,v}}\right) \right\} + \\ & + \frac{1}{m} \left\{ (b_1 + b_2) \left[\mu_{m,v} \cdot \Phi\left(\frac{\mu_{m,v}}{\sigma_{m,v}}\right) + \sigma_{m,v} \cdot \phi\left(\frac{\mu_{m,v}}{\sigma_{m,v}}\right) \right] - b_2 \cdot \mu_{m,v} \right\} \end{aligned} \quad (6.40)$$

zodat de totale gemiddelde verwachte kosten per tijdsperiode bij toepassing van een lineaire beslissingsregel waarbij om de m periode beslist wordt ($C_{L(m)}$) gelijk zijn aan:

$$C_{L(m)} = C_{VL(m)} + C_{TL(m)} \quad (6.41)$$

De optimale beleidsparameters κ_m en θ_m , gegeven het aantal tijdsperiodes m waaruit de beslissingsperiode bestaat, zijn nu te bepalen door de partiële afgeleiden van de gemiddelde verwacht kosten per tijdsperiode naar de optimale normvoorraad en de aanpassingscoëfficiënt gelijk aan nul te stellen:

$$\frac{\partial C_{L(m)}}{\partial \theta_m} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial C_{L(m)}}{\partial \mu_i(m)} \cdot \frac{\partial \mu_i(m)}{\partial \theta_m} = 0 \quad (6.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{L(m)}}{\partial \kappa_m} = & \sum_{i=1}^m \frac{\partial C_{L(m)}}{\partial \mu_i(m)} \cdot \frac{d\mu_i(m)}{d\kappa_m} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial C_{L(m)}}{\partial \sigma_i^2} \cdot \frac{d\sigma_i^2(m)}{d\kappa_m} + \\ & + \frac{\partial C_{L(m)}}{\partial \sigma_{m,v}^2} \cdot \frac{d\sigma_{m,v}^2}{d\kappa_m} = 0 \end{aligned} \quad (6.43)$$

Op een zelfde wijze als in paragraaf 6.2 volgt uit (6.42) de voorwaarde waaraan de optimale normvoorraad bij een beslissingsperiode van m tijdsperioden moet voldoen:

$$\sum_{i=1}^m \phi\left(\frac{\mu_i(m)}{\sigma_i(m)}\right) = \frac{m \cdot s}{h+s} \quad (6.44)$$

en is (6.43), indien aan (6.42) voldaan wordt, te schrijven als:

$$\frac{\partial C_{L(m)}}{\partial \kappa_m} = \frac{(h+s)(\kappa_m+1) \cdot \sigma}{[-\kappa_m(\kappa_m+2)]^{1,5}} \cdot \sum_{i=1}^m \phi\left(\frac{\mu_i(m)}{\sigma_i(m)}\right) \cdot (2\pi)^{-0,5} \quad (6.45)$$

$$- \left[\frac{(a_2 - a_1) \cdot \mu}{(-\kappa_m)^{1,5} (\kappa_m+2)^{0,5} \cdot \sigma} + \frac{(b_1 + b_2) \cdot \sigma}{(\kappa_m+2)^{1,5} (-\kappa_m)^{0,5}} \right] \cdot (2\pi)^{0,5} \cdot \exp\left[\frac{\kappa_m+2}{2m\kappa_m} \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2\right] = 0$$

Gegeven m zijn nu de optimale beleidsparemeters van de lineaire beslissingsregel in principe m.b.v. (6.44) en (6.45) te bepalen. Het rekenwerk voor de bepaling is echter zo omvangrijk dat het geen voordelen meer heeft om deze sub-optimale beslissingsregel toe te passen.

Het voorafgaande impliceert niet dat er geen uitspraak over de invloed van de vaste transactiekosten op de lengte van de beslissingsperiode mogelijk is. Immers zijn er geen variabele transactiekosten verbonden met een transactie en zijn de vaste transactiekosten van een kassaldo-vermeerdering gelijk aan die van een kassaldo-vermindering of geldt in het algemeen:

$$(a_2 - a_1) \cdot \mu + (b_1 + b_2) \cdot \sigma^2 < 0,$$

dan is het evenals bij een beslissingsperiode van één tijdsperiode optimaal om aan het begin van de beslissingsperiode de voorraad gelijk te maken aan de normvoorraad. Vindt er aan het begin van iedere beslissingsperiode een volledige aanpassing plaats ($\kappa_m = -1$), dan volgt nu uit (6.33), (6.35), (6.37) en (6.38) voor de parameters van de invariante verdelingen:

$$\mu_i = \theta_m - i \mu \qquad \mu_{m,v} = m \cdot \mu \qquad (6.46)$$

$$\sigma_i^2 = i \cdot \sigma^2 \qquad \sigma_{m,v}^2 = m \cdot \sigma^2 \qquad (6.47)$$

zodat (6.44) te herschrijven is als:

$$W(\theta_m) := \sum_{i=1}^m \phi\left(\frac{\theta_m - i \cdot \mu}{\sigma \cdot \sqrt{i}}\right) = \frac{m \cdot s}{h+s} \qquad (6.48)$$

Omdat $W(\theta_m)$ een stijgende functie van θ_m is op $(-\infty, m]$ is de optimale normvoorraad, gegeven dat de beslissingsperiode uit m tijdsperiodes bestaat, eenduidig uit (6.48) te bepalen door gebruik te maken van de tabellen voor de standaardnormale verdeling.

Voor het bepalen van de optimale lengte van de beslissingsperiode moeten de gemiddelde verwachte kosten per tijdsperiode geminimaliseerd worden. Gebruikmakend van (6.46) en (6.47) worden (6.39) en (6.40)

$$C_{VL(m)} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left\{ (h+s) \left[(\theta_m - i \cdot \mu) \cdot \phi\left(\frac{\theta_m - i \cdot \mu}{\sigma \cdot \sqrt{i}}\right) + \sigma \cdot \sqrt{i} \cdot \phi\left(\frac{\theta_m - i \cdot \mu}{\sigma \cdot \sqrt{i}}\right) \right] - s(\theta_m - i \cdot \mu) \right\} \qquad (6.49)$$

$$C_{TL(m)} = \frac{1}{m} [a_2 - (a_2 - a_1) \phi\left(\frac{\mu \cdot \sqrt{m}}{\sigma}\right)] + (b_1 + b_2) \left[\mu \cdot \phi\left(\frac{\mu \cdot \sqrt{m}}{\sigma}\right) + \frac{\sigma}{\sqrt{m}} \cdot \phi\left(\frac{\mu \cdot \sqrt{m}}{\sigma}\right) \right] - b_2 \cdot \mu \qquad (6.50)$$

Uit de berekeningen blijkt dat de gemiddelde verwachte voorraadkosten per periode stijgen als de lengte van de beslissingsperiode toeneemt en de gemiddelde verwachte voorraadkosten berekend worden met de door de (6.48) gegeven normvoorraad. De gemiddelde verwachte transactiekosten per periode dalen, zoals in bijlage E.4 (blz. 225) bewezen wordt, als de lengte van de beslissingsperiode toeneemt. De optimale lengte van de beslissingsperiode is dus die m waarbij de gemiddelde verwachte kosten per periode minimaal zijn.

6.5 De lineaire beslissingsregel met variabele beslissingsperiode als alternatief voor de optimale strategie

Bij het evalueren van de lineaire beslissingsregel met variabele beslissingsperiode als alternatief voor de optimale strategie beperken we ons tot de lineaire beslissingsregel met een volledige aanpassing aan de normvoorraad aan het begin van een beslissingsperiode omdat hiervoor de beleidsparameters m en θ_m eenvoudig te berekenen zijn. Alvorens de procentuele afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode bij toepassing van deze lineaire beslissingsregel te berekenen, onderzoeken we eerst de proportionaliteitseigenschappen en de overeenkomst tussen de beleidsparameters m en θ_m en de overeenkomstige grootheden bij een optimaal beleid.

Uit (6.44), (6.45) en (6.41) volgt dat de optimale normvoorraad, de optimale aanpassingscoëfficiënt en de gemiddelde verwachte kosten per tijdsperiode aan de proportionaliteitseigenschappen 6.1 t/m 6.3 voldoen. Bovendien volgt uit de eigenschappen 6.1 en 6.2 dat ook (6.49) en (6.50) aan eigenschap 6.3 voldoen. Omdat de optimale lengte van de beslissingsperiode bepaald wordt door het minimaliseren van de som van de door (6.49) en (6.50) weergegeven gemiddelde verwachte voorraadkosten per periode en gemiddelde verwachte transactiekosten per periode en deze met λ vermenigvuldigd worden wanneer de parameters met λ vermenigvuldigd worden, geldt ook de volgende eigenschap:

Eigenschap 6.4 Een proportionele verandering van de kostenparameters met eenzelfde factor λ heeft geen invloed op de optimale lengte van de beslissingsperiode. Ook heeft een proportionele verandering van de vaste transactiekosten, de verwachtingswaarde en de standaardafwijking met een factor λ geen invloed op de optimale lengte van de beslissingsperiode:

$$m(\lambda h, \lambda s, \lambda a_1, \lambda a_2, \lambda b_1, \lambda b_2, \mu, \sigma) = m(h, s, a_1, a_2, b_1, b_2, \mu, \sigma)$$

$$m(h, s, \lambda a_1, \lambda a_2, b_1, b_2, \lambda \mu, \lambda \sigma) = m(h, s, a_1, a_2, b_1, b_2, \mu, \sigma)$$

Hieruit volgt dat ook de resultaten bij toepassing van de lineaire beslissingsregel met variabele beslissingsperiode gegeneraliseerd mogen worden. De resultaten uit de berekeningen met de relevante parametercombinaties worden vermeld in tabel VI.2 van bijlage VI (blz. 264).

Omdat bij een optimaal beleid zonder variabele transactiekosten de beide terugkeerpunten U en D samenvallen en omdat er bij de lineaire beslissingsregel met variabele beslissingsperiode en alleen vaste transactiekosten aan het begin van iedere beslissingsperiode een volledige bijsturing plaatsvindt, hebben de samenvallende terugkeerpunten bij het optimale beleid eenzelfde functie als de normvoorraad bij de lineaire beslissingsregel met variabele beslissingsperiode. Een vergelijking tussen de optimale normvoorraad en de optimale waarden van de samenvallende terugkeerpunten geeft dus een goede indicatie omtrent de bruikbaarheid van de lineaire beslissingsregel met variabele beslissingsperiode, als benadering voor een optimaal beleid. Daarom geven we in tabel 6.3 een vergelijking tussen de optimale terugkeerpunten en de optimale normvoorraad voor $h = s$ en $b_1 = b_2 = 0$.

$a_1 = a_2$	$\sigma = 0,5\mu$		$\sigma = \mu$		$\sigma = 3\mu$	
	D = U	θ_m	D = U	θ_m	D = U	θ_m
0	1,00 μ	1,00 μ	1,00 μ	1,00 μ	1,00 μ	1,00 μ
0,1 μh	1,01 μ	1,00 μ	1,02 μ	1,00 μ	1,01 μ	1,00 μ
μh	1,45 μ	1,41 μ	1,34 μ	1,41 μ	1,15 μ	1,00 μ
10 μh	3,75 μ	3,38 μ	3,31 μ	3,17 μ	2,30 μ	2,61 μ

Tabel 6.3 De optimale terugkeerpunten en de optimale normvoorraad van de lineaire beslissingsregel met variabele beslissingsperiode voor $h = s$

Zoals uit deze tabel blijkt is er een redelijke mate van overeenstemming tussen de relevante beleidsparameters. Een zelfde resultaat geldt ook voor $s = 3h$.

Het gemiddelde aantal transacties dat per tijdsperiode plaatsvindt, is bij de lineaire beslissingsregel met variabele beslissingsperiode gelijk

aan één gedeeld door de lengte van de beslissingsperiode. Het verwachte aantal transacties per tijdsperiode is bij een optimaal beleid gelijk aan de kans op een transactie op het beslissingsmoment. Een vergelijking tussen de twee genoemde grootheden geeft dus ook een indicatie omtrent de bruikbaarheid van de lineaire beslissingsregel met variabele beslissingsperiode indien er geen proportionele transactiekosten zijn. We geven een dergelijke vergelijking voor $s = h$ in tabel 6.4.

$a_1 = a_2$	$\sigma = 0,5\mu$		$\sigma = \mu$		$\sigma = 3\mu$	
	$P[v \neq 0]$	$1/m$	$P[v \neq 0]$	$1/m$	$P[v \neq 0]$	$1/m$
0	0,98	1,00	0,95	1,00	0,94	1,00
$0,1\mu h$	0,92	1,00	0,76	1,00	0,81	1,00
μh	0,47	0,50	0,40	0,50	0,42	1,00
$10\mu h$	0,16	0,17	0,15	0,17	0,14	0,20

Tabel 6.4 De kans op een transactie per periode bij een optimaal beleid en het gemiddelde aantal transacties per periode bij de lineaire beslissingsregel met variabele beslissingsperiode voor $h = s$, $b_1 = b_2 = 0$ en $\mu > 0$

Uit tabel 6.4 blijkt, dat het gemiddeld aantal transacties per periode bij de lineaire beslissingsregel met variabele beslissingsperiode groter is dan bij de optimale beslissingsregel. De verschillen zijn in de meeste gevallen echter gering. Dit geldt ook indien $s = 3h$.

De procentuele afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode bij toepassing van de optimale lineaire beslissingsregel met variabele beslissingsperiode, indien er geen proportionele transactiekosten zijn, worden voor een verwachte kassaldooverandering groter dan nul gegeven in tabel 6.5.

$a_1=a_2$	$s = h$			$s = 3h$		
	$\sigma = 0,5\mu$	$\sigma = \mu$	$\sigma = 3\mu$	$\sigma = 0,5\mu$	$\sigma = \mu$	$\sigma = 3\mu$
0,1 μh	1,8	2,2	0,8	0,7	1,0	0,5
μh	6,4	14,5	13,9	10,2	18,2	7,8
10 μh	3,6	12,5	26,0	7,3	19,4	29,1

Tabel 6.5 De procentuele afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode bij toepassing van de lineaire beslissingsregel met variabele beslissingsperiode voor $b_1 = b_2 = 0$ en $\mu > 0$

Zoals uit deze tabel blijkt, geeft de lineaire beslissingsregel met variabele beslissingsperiode redelijke resultaten als er geen proportionele kosten aan een transactie verbonden zijn. Dat deze resultaten verkregen worden ondanks het feit dat de structuur van de lineaire beslissingsregel duidelijk afwijkt van die van de optimale beslissingsregel, komt doordat zowel de "optimale" voorraad als het gemiddeld aantal transacties per periode bij beide beslissingsregels niet sterk van elkaar verschillen.

6.6 Een "optimale" lineaire beslissingsregel

In de voorafgaande paragrafen is gebleken, dat de lineaire beslissingsregel een redelijk alternatief is voor de optimale, indien er geen vaste transactiekosten zijn en dat dit geldt voor de lineaire beslissingsregel met variabele beslissingsperiode, indien er geen proportionele transactiekosten zijn. Zijn zowel de proportionele als de vaste transactiekosten ongelijk aan nul, dan is een lineaire beslissingsregel in het algemeen geen adequaat alternatief voor het optimale beleid omdat bij de lineaire beslissingsregel geen rekening met de vaste transactiekosten gehouden wordt terwijl de optimale beleidsparameters van de lineaire beslissingsregel met variabele beslissingsperiode niet eenvoudig te berekenen zijn indien er ook proportionele kosten met een transactie verbonden zijn.

Aan de genoemde bezwaren kan echter tegemoetgekomen worden door het construeren van de volgende beslissingsregel, welke we zullen aanduiden als de "optimale" lineaire beslissingsregel:

- a) bereken de optimale lengte van de beslissingsperiode door gebruik te maken van (6.48) t/m (6.50);
- b) is de lengte van de optimale beslissingsperiode één tijdsperiode, bereken dan de beleidsparameters van de lineaire beslissingsregel met (6.21) en (6.26);
- c) is de lengte van de optimale beslissingsperiode groter dan één tijdsperiode kies dan $\kappa = -1$ en gebruik dan de reeds onder a) verkregen beleidsparameters.

Door de "optimale" lineaire beslissingsregel worden de voordelen van de in paragraaf 6.2 en 6.4 besproken beslissingsregels gecombineerd. Immers door de bepaling van de optimale lengte van de beslissingsperiode wordt op een adequate wijze rekening gehouden met de vaste transactiekosten zoals gebleken is uit de vergelijking tussen de kans op een transactie per periode bij een optimaal beleid en het gemiddelde aantal transacties per periode bij toepassing van de lineaire beslissingsregel met variabele beslissingsperiode.

Blijkt de optimale lengte van de beslissingsperiode één tijdsperiode te bedragen dan kan ook de optimale aanpassingscoëfficiënt bepaald worden waardoor ook rekening gehouden wordt met de proportionele transactiekosten.

Blijkt de optimale lengte van de beslissingsperiode meer dan één tijdsperiode te bedragen dan wordt ook indirect rekening gehouden met de proportionele transactiekosten ondanks het feit dat er aan het begin van een beslissingsperiode altijd een volledige bijsturing plaatsvindt. Het genoemde indirecte effect ontstaat doordat, zoals in bijlage E.4 (blz. 225) wordt aangetoond, de invloed van de verwachte variabele transactiekosten op de totale verwachte kosten per tijdsperiode minder wordt als de lengte van de beslissingsperiode toeneemt.

We zullen in de volgende paragraaf de geconstrueerde beslissingsregel evalueren door zowel te onderzoeken of de gekozen uitgangspunten juist zijn als door het berekenen van de procentuele afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode bij toepassing van de "optimale" line-

aire beslissingsregel. Dat ook de "optimale" lineaire beslissingsregel aan proportionaliteitseigenschap 6.3 voldoet, volgt direct uit de reeds eerder genoemde proportionaliteitseigenschappen.

6.7 Evaluatie van de "optimale" lineaire beslissingsregel

Voor het evalueren van de "optimale" lineaire beslissingsregel als alternatief voor het optimale beleid moeten de optimale beleidsparameters en de verwachte kosten per tijdperiode van de "optimale" lineaire beslissingsregel berekend worden. De optimale beleidsparameters volgen rechtstreeks uit de resultaten zoals vermeld in tabel VI.1 en tabel VI.2 van bijlage VI (blz. 263 en 264). De verwachte kosten per periode zijn vervolgens te berekenen door gebruik te maken van de formules (6.13), (6.14), (6.49) en (6.50).

Om te onderzoeken of bij een verwachte kasgeldverandering per periode groter dan nul het gekozen uitgangspunt bij de constructie van de "optimale" lineaire beslissingsregel juist is, vergelijken we eerst de minimaal verwachte kosten per periode bij toepassing van de lineaire beslissingsregel en de minimaal verwachte kosten per periode bij toepassing van de lineaire beslissingsregel met variabele beslissingsperiode en een volledige aanpassing aan de normvoorraad aan het begin van iedere beslissingsperiode.

Uit de berekeningen met een verwachte kassaldooverandering groter dan nul blijkt dat de "optimale" lineaire beslissingsregel in bijna alle gevallen dezelfde beslissingsregel geeft als die, welke men verkrijgt indien men de beslissingsregel met de laagste verwachte kosten per periode kiest uit de twee genoemde alternatieven.

De enige uitzondering hierop voor de 96 onderzochte combinaties, is indien $\mu > 0$ die met $s = 3h$, $a_1 = a_2 = \mu h$, $b_1 = b_2 = 10h$, $\sigma = \mu$. Alleen in dit geval weegt het rekening houden met de vaste transactiekosten niet op tegen het onvoldoende rekening houden met de (hoge) proportionele transactiekosten. Door dit resultaat wordt de juistheid van de bij de constructie van de "optimale" lineaire beslissingsregel gekozen uitgangspunten bevestigd.

De procentuele afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode bij toepassing van de "optimale" lineaire beslissingsregel worden gegeven in tabel VI.3 van bijlage VI (blz. 265) en gedeeltelijk in tabel 6.6.

$a_1 = a_2$	$b = h$			$b = 5h$		
	$b_1 = b_2 = h$			$b_1 = b_2 = 5h$		
	$\sigma = 0,5\mu$	$\sigma = \mu$	$\sigma = 3\mu$	$\sigma = 0,5\mu$	$\sigma = \mu$	$\sigma = 3\mu$
0	0,6	3,0	4,9	0,4	3,1	11,8
$0,1\mu h$	1,0	4,5	7,3	0,5	3,6	12,9
μh	3,6	10,3	18,3	1,6	7,0	19,3
$10\mu h$	2,7	9,7	23,0	1,4	5,1	24,7

Tabel 6.6 De procentuele afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode bij toepassing van de "optimale" lineaire beslissingsregel voor $s = h$ en $\mu > 0$

Uit de resultaten blijkt dat de "optimale" lineaire beslissingsregel een redelijk alternatief is voor de optimale beslissingsregel. Bovendien dat de verhouding tussen de voorraadkosten en de kosten van tekort weinig invloed hebben op de resultaten en dat de resultaten beter zijn naarmate de variatiecoëfficiënt kleiner is. Ook blijkt uit de resultaten dat met de "optimale" lineaire beslissingsregel een goede benadering voor het optimale beleid verkregen wordt in de gevallen waarin de voorraadtheoretische benadering minder goede resultaten geeft. Met name geldt dit voor $h = s$ en $\sigma = 0,5\mu$.

6.8 Conclusies en slotopmerkingen

In dit hoofdstuk is de lineaire beslissingsregel besproken als alternatief voor een optimaal beleid en is een "optimale" lineaire beslissingsregel geconstrueerd waarvan de beleidsparameters eenvoudiger te bepalen

zijn dan die van het optimale beleid. Zoals uit de berekeningen met een verwachte kassaldooverandering per periode groter dan nul gebleken is, geeft de "optimale" lineaire beslissingsregel redelijke resultaten, omdat bij toepassing van deze regel op een adequate wijze rekening gehouden wordt met de relevante kosten.

We hebben tot nu toe geen berekeningen gemaakt met de lineaire beslissingsregel bij een verwachte kassaldooverandering per periode gelijk aan nul of kleiner dan nul. Gezien de symmetrische structuur van de lineaire beslissingsregel is het voor de hand liggend, dat de resultaten voor een verwachte kassaldooverandering per periode kleiner dan nul dezelfde zijn dan die bij een verwachte kassaldooverandering per periode groter dan nul. Deze conclusie wordt in feite bevestigd door het niet duidelijk van elkaar verschillen van de resultaten voor $s = h$ en $s = 3h$.

Aan de bruikbaarheid van de lineaire beslissingsregel als alternatief voor het optimale beleid bij een verwachte kassaldooverandering gelijk aan nul is aandacht geschonken door Inderfurth (1977). Bij een verwachte kassaldooverandering per periode gelijk aan nul zijn de optimale beleidsparameters iets eenvoudiger te berekenen doordat de vaste transactiekosten hierop geen invloed hebben. Bovendien is nu ook de optimale aanpassingscoëfficiënt onafhankelijk van de standaardafwijking. De optimale waarden van de beleidsparameters (θ in eenheden σ) en de minimaal verwachte kosten per periode (in eenheden $h\sigma$) staan eveneens vermeld in tabel VI.1 van bijlage VI (blz. 263). De maximale procentuele afwijking van de minimaal verwachte kosten per periode bij een verwachte kassaldooverandering van nul en geen vaste transactiekosten bedraagt voor de onderzochte combinaties: 12.6%.

Aan de bruikbaarheid van de lineaire beslissingsregel met variabele beslissingsperiode is door Inderfurth (1977) maar beperkt aandacht geschonken. Hij heeft dit alleen gedaan voor $h = s$ omdat dan bij een verwachte kassaldooverandering per periode gelijk aan nul ook de optimale normvoorraad gelijk aan nul is, waardoor ook de optimale aanpassingscoëfficiënt relatief eenvoudig te bepalen is.

Uitgaande van alleen vaste transactiekosten hebben we ook de optimale beleidsparameters en de minimaal verwachte kosten per periode berekend. De resultaten worden vermeld in tabel VI.2 van bijlage VI (blz. 264). De maximale procentuele afwijking van de minimaal verwachte kosten per pe-

riode bij toepassing van de lineaire beslissingsregel met variabele beslissingsperiode bedraagt voor de onderzochte combinaties: 33,5%. De "optimale" lineaire beslissingsregel is bij een verwachte kassaldoverandering gelijk aan nul geen bruikbaar alternatief omdat de hieraan ten grondslag liggende redenering nu niet geldt.

Tot slot van dit hoofdstuk nog een opmerking over de hierin gehanteerde normaliteitsveronderstelling. Door Bühler (1979) is de deze veronderstelling nader onderzocht. Hij heeft aangetoond dat indien er alleen variabele transactiekosten zijn en de exogene veranderingen per periode β verdeeld zijn de verwachte kosten per periode op basis van normaal verdeelde veranderingen bepaalde beleidsparameters, nauwelijks afwijken van die, welke men verkrijgt als men de beleidsparameters bepaald uitgaande van een β -verdeling.

HOOFDSTUK 7

CONTINUE CONTROLE

7.1 Inleiding

In de twee voorafgaande hoofdstukken hebben we twee sub-optimale beslissingsregels besproken waarvoor de beleidsparameters eenvoudig te berekenen zijn. Een derde mogelijkheid om de beleidsparameters eenvoudig te berekenen is te verkrijgen door de veronderstelling, dat zowel de controle als de eventuele bijsturing van het kassaldo aan het begin van een periode plaatsvinden, te vervangen door de veronderstelling dat het kassaldo continu gecontroleerd wordt en dat er een transactie wordt uitgevoerd op het moment dat het kassaldo een van de controlegrenzen overschrijdt. We zullen deze wijze van handelen in het vervolg aanduiden als continue controle en de hierbij behorende optimale beleidsparameters noteren als: d_c , D_c , U_c en u_c .

Miller en Orr (1966, 1968) hebben een belangrijke impuls gegeven tot het ontwikkelen en evalueren van op continue controle gebaseerde modellen voor het stochastische liquiditeitsprobleem. Kenmerkend voor het door Miller en Orr ontwikkelde model (1966) is dat er alleen vaste kosten met een transactie verbonden zijn, dat de verwachtingswaarde van de kassaldo-verandering per periode gelijk aan nul is en dat de beslisser de waarde van de onderste controlegrens zelf specificeert.

Aan de door Constantinides (1976) geleverde bijdrage tot het liquiditeitsprobleem waarin uitgegaan wordt van continue controle is in de financiële literatuur veel minder aandacht besteed dan aan de bijdragen van Miller en Orr. Niet alleen heeft Constantinides een veel algemenere formulering gegeven voor het door Miller en Orr behandelde liquiditeitsprobleem, maar ook heeft hij onder bepaalde voorwaarden de optimale beleidsparameters afgeleid voor het in paragraaf 3.1 geformuleerde probleem bij continue controle.

In paragraaf 7.2 zal een beschrijving gegeven worden van het door Miller en Orr (1966) ontwikkelde model, de erop gebaseerde varianten en de beschreven toepassingen.

In paragraaf 7.3 wordt het door Constantinides ontwikkelde model beschreven, omdat dit model de grondslag levert voor de bepaling van de optimale beleidsparameters in paragraaf 7.4. In deze paragraaf worden de optimale beleidsparameters bepaald voor combinaties van probleemparameters die niet aan de door Constantinides gestelde voorwaarden voldoen. Dit is het geval indien er alleen vaste transactiekosten zijn en meestal indien de kosten van tekort niet gelijk zijn aan die van het in voorraad houden. Bovendien vermelden we in deze paragraaf de resultaten van Constantinides.

In paragraaf 7.5 zullen we vervolgens de beleidsparameters uit het model met continue controle evalueren als een alternatief voor de optimale beleidsparameters en in paragraaf 7.6 worden de resultaten uit dit hoofdstuk samengevat.

7.2 Het model van Miller en Orr

Het artikel van Miller en Orr (1966) heeft de belangrijkste bijdrage geleverd voor de toepassing van controlemodellen op het stochastische kasbeheersprobleem. Het model van Miller en Orr is gebaseerd op de volgende veronderstellingen:

1. Er is een saldo dat minimaal gehandhaafd moet worden. Dit saldo wordt ter vereenvoudiging van de beschrijving gelijk aan nul gesteld.
2. De voorraadkosten zijn rechtevenredig met het saldo dat aangehouden wordt en de tijd dat het aangehouden wordt.
3. De transactiekosten zijn onafhankelijk van de omvang van de transactie en van de richting waarin de transactie plaatsvindt ($a_1 = a_2 = a$).
4. De kassaldooveranderingen per periode zijn normaal verdeeld met verwachtingswaarde nul en variantie σ^2 .
5. Een transactie wordt uitgevoerd op het moment dat een controlegrens overschreden wordt.

De optimale beleidsparameters zijn uitgaande van de genoemde veronderstellingen gelijk aan

$$u_c = 3 \cdot (3a \cdot \sigma^2 / 4h)^{1/3}$$

$$U_c = D_c = (3a \cdot \sigma^2 / 4h)^{1/3}$$

$$d_c = 0$$

Kenmerkend voor dit resultaat is dat de transactie-omvang bij een saldo-vermindering ($u_c - U_c$) altijd tweemaal zo groot is als die bij een saldo-vermeerdering ($D_c - d_c$).

In hun tweede artikel beschrijven Miller en Orr (1968) onder meer de uitbreidingsmogelijkheden voor een probleem met meerdere activa. Weitzmann (1968) verruimde de veronderstellingen van het model door een asymmetrische transactiekostenfunctie te introduceren en Frost (1970) door de invloed van de relevante kostenfuncties op de bepaling van het minimaal aan te houden saldo in de beschouwing te betrekken.

Aan de toepassingsmogelijkheden van het model van Miller en Orr of van varianten hierop is ruimschoots aandacht geschonken in de literatuur. Voorbeelden hiervan zijn te vinden bij Miller en Orr (1967), Maldonado en Ritter (1971), Orr (1970), Stone (1972), Homonoff en Mullins (1975) en Scott (1983). Stone (1972) en Homonoff en Mullins (1975) houden bij de formulering van hun model zowel rekening met de looptijdstructuur van de beleggingsmogelijkheden als met de in de praktijk vaak gestelde eis om een minimaal gemiddeld saldo over een tijdvak aan te houden ter compensatie van de door de bank verleende diensten. Aan de verkregen resultaten omtrent de mate waarin de onderzochte kassaldo-veranderingen aan de gestelde hypothese voldoen hebben we reeds aandacht geschonken in paragraaf 1.3.

7.3 Het model van Constantinides

Evenals bij het discrete stochastische liquiditeitsprobleem is er ook bij het continue stochastische liquiditeitsprobleem een onderscheid te maken tussen de artikelen die betrekking hebben op de bepaling van de structuur van het optimale beleid en de artikelen die gericht zijn op de

bepaling van de optimale beleidsparameters ervan uitgaande dat een bepaalde structuur optimaal is.

Twee belangrijke bijdragen aan de bepaling van de optimale structuur zijn geleverd door Vial (1972) en Constantinides en Richard (1978). Eerstgenoemde auteur (Vial 1972, blz. 254) voert het begrip toegelaten structuur in, dat aan de volgende eisen moet voldoen:

1. het continueringsgebied, (d_c, u_c) , is een eindige verzameling van open intervallen;
2. ieder terugkeerpunt behoort tot het continueringsgebied.

Hij bewees voor het model met gediscoteerde kosten, onder de veronderstelling dat er een waardefunctie bestaat die aan bepaalde eisen voldoet, dat het optimale beleid een toegelaten structuur heeft.

De eisen waaraan zijn waardefunctie moet voldoen komen overeen met de nog te bespreken optimaliteitsvoorwaarden (7.4) t/m (7.7). Constantinides en Richard (1978) bepaalden voor het model met gediscoteerde kosten de genoemde waardefunctie, bewezen dat deze functie aan de door Vial gestelde eisen voldoet en dat het optimale beleid een (d_c, D_c, U_c, u_c) -structuur heeft.

Hoewel optimale beleidsparameters ook bepaald kunnen worden uit de genoemde waardefunctie, maken we hiervan geen gebruik omdat de veronderstellingen voor een expliciete bepaling van de beleidsparameters te beperkend zijn. Dit is niet het geval bij het door Constantinides (1976) geformuleerde model met gemiddelde verwachte kosten. Hiermee zijn de optimale beleidsparameters te bepalen, indien men ervan uitgaat dat het optimale beleid een (d_c, D_c, U_c, u_c) -structuur heeft. Omdat het door Constantinides geformuleerde model het uitgangspunt is voor de in de volgende paragraaf af te leiden resultaten zullen we eerst het liquiditeitsprobleem formuleren als een stochastisch beslissingsprobleem met continue controle.

Bij de formulering van het liquiditeitsprobleem als een stochastisch beslissingsprobleem met continue controle noteren we de exogene cumulatieve kassaldooverandering gedurende het tijdsinterval $[t, s)$ als: $k(t, s)$. Deze kassaldooverandering wordt zo gedefinieerd, dat voor elke indeling

$t_0 < t_1 < \dots \infty$ van het interval $[t_0, \infty)$, de stochastische variabelen $k(t_0, t_1), k(t_1, t_2), \dots, k(t_i, t_{i+1})$ onafhankelijk en normaal verdeeld zijn met verwachtingswaarde $(t_{i+1} - t_i) \cdot \mu$ en variantie $(t_{i+1} - t_i) \cdot \sigma^2$.

Hieruit volgt dat de exogene cumulatieve kassaldooverandering beschreven kan worden in termen van een Wiener proces $\omega(t)$ als:

$$k(t, t+dt) = \mu dt + [\omega(t+dt) - \omega(t)] \cdot \sigma$$

De toestand van het kasbeheerssysteem op tijdstip t wordt bepaald door het kassaldo op tijdstip t en genoteerd als $x(t)$. De beslisser volgt het proces continu en intervenueert alleen indien de werkelijke toestanden afwijken van de gewenste toestanden. Omdat de beslissing om in te grijpen op tijdstip t afhangt van de toestand van het systeem juist voor tijdstip t , zijn de tijdstippen waarop de beslisser intervenueert, stochastische variabelen. We noteren deze als τ_i , met $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_N$. Bovendien definiëren we een rij transacties: $\{v_i\}$, zodat op tijdstip τ_i het kassaldo verandert wordt met v_i . Noteren we het kassaldo op tijdstip τ_i , juist voordat de transactie uitgevoerd wordt door $x(\tau_i^-)$ en het saldo nadat de transactie uitgevoerd is door $x(\tau_i)$, dan kunnen de toestandsvergelijkingen van het kassysteem als volgt geformuleerd worden:

$$x(\tau_i) = x(\tau_i^-) + v_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

$$dx(t) = -k(t, t+dt), \quad \tau_i \leq t < \tau_{i+1}^-, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

Door de eerste toestandsvergelijking wordt de verandering die in de toestand van het systeem optreedt ten gevolge van een transactie weergegeven. Door de tweede de verandering die optreedt door de exogene kassaldooveranderingen tussen twee transacties. Hierin staat rechts van het gelijkteken een minteken omdat een positieve waarde van $k(t, t+dt)$ een saldoovermindering tot gevolg heeft.

Evenals in paragraaf 2.2 bestaan de kosten van een transactie uit een vaste en een proportionele component, terwijl de kosten van het in voorraad houden en de kosten van tekort op ieder tijdstip rechtevenredig zijn met de omvang van het kassaldo op dat tijdstip:

$$\begin{aligned}
 V(x(t)) &= h \cdot x(t) \quad , \text{ indien } x(t) \geq 0 ; \\
 &= -s \cdot x(t) \quad , \text{ indien } x(t) < 0
 \end{aligned}
 \tag{7.1}$$

Bij de bepaling van de optimale beleidsparameters gaan we ervan uit dat het optimale beleid een (d_c, D_c, U_c, u_c) -structuur heeft. Bij het formuleren van de doelstellingsfunctie maken we gebruik van een index p waardoor aangegeven wordt dat de vier beleidsparameters elke een specifieke waarde hebben. De verwachte kosten van een beleid met parametercombinatie p , gegeven het kassaldo op tijdstip 0: $x(0)$, gedurende het interval $[0, t)$ noteren we als:

$$E_{x(0)}^p \left\{ \sum_{i=1}^{N(t)} T(v_i) + \int_0^t V(x(s)) ds \right\} ,$$

waarin $N(t)$ het aantal transacties in het tijdsinterval $[0, t)$ aangeeft. De verwachte kosten per tijdseenheid van een beleid met parametercombinatie p , gegeven het kassaldo op tijdstip 0 als de planhorizon naar oneindig gaat, noteren we als: γ_p , dus

$$\gamma_p = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E_{x(0)}^p \left\{ \sum_{i=1}^{N(t)} T(v_i) + \int_0^t V(x(s)) ds \right\} \tag{7.2}$$

Voor het bepalen van de optimale beleidsparameters moeten de verwachte kosten per tijdseenheid geminimaliseerd worden. Hiertoe schrijven we de verwachte kosten over het tijdsinterval $[0, t)$ als een functie van de begintoestand en de verwachte kosten per tijdseenheid in de stationaire toestand:

$$E_{x(0)}^p \left\{ \sum_{i=1}^{N(t)} T(v_i) + \int_0^t V(x(s)) ds \right\} = W^p(x(0)) + \gamma_p t$$

De functie $W^p(x(0))$ wordt door Constantinides (1976) een potentiële kostenfunctie genoemd omdat het verschil in totale kosten bij twee verschillende beginsaldo's $x_1(0)$ en $x_2(0)$ indien de planhorizon naar oneindig gaat en een beleid met dezelfde waarden voor de beleidsparameters gevoerd wordt, gegeven wordt door $W^p(x_1(0)) - W^p(x_2(0))$.

Ter vereenvoudiging van de formules laten we in het vervolg zowel de index p als de tijdsaanduiding bij de toestandsvariabele x achterwege. Constantinides (1976) heeft bewezen dat indien de planhorizon naar oneindig gaat de functie $W(x)$ in het continueringsgebied (d,u) , aan de volgende differentiaalvergelijking voldoet:

$$-\gamma + V(x) - \mu \cdot W'(x) + \frac{1}{2} \sigma^2 \cdot W''(x) = 0 \quad (7.3)$$

Hierin is:

$$W'(x) := \frac{dW(x)}{dx} \text{ en } W''(x) := \frac{d^2W(x)}{dx^2}.$$

De optimale beleidsparameters kunnen nu bepaald worden door gebruik te maken van (7.3) en van de eigenschappen van een optimaal (d_c, D_c, U_c, u_c) -beleid.

7.4 Bepaling van de optimale beleidsparameters

In deze paragraaf bepalen we de optimale beleidsparameters door gebruik te maken van (7.3), de gegeven interpretaties van γ en $W(x)$ en de volgende eigenschappen:

1) Bij een optimaal beleid zal er, indien er een transactie wordt uitgevoerd, altijd een zodanige kassaldooverandering plaatsvinden, dat de marginale transactiekosten in het optimale punt gelijk zijn aan de marginale reductie van de potentiële kostenfunctie. Hieruit volgt dat voor een optimale oplossing moet gelden:

$$W'(D_c) = -b_1 \quad (7.4)$$

$$W'(U_c) = +b_2 \quad (7.5)$$

2) Bij een optimaal beleid moet gelden dat de reductie van de potentiële kostenfunctie door een saldoovermindering van u naar U en door een saldo-vermeerdering van d naar D , gelijk zijn aan de hiervoor te maken trans-

actiekosten (vergelijk ook figuur 2.5). Hieruit volgt dat voor een optimale oplossing moet gelden:

$$W(d_c) - W(D_c) = a_1 + b_1 \cdot (D_c - d_c) \quad (7.6)$$

$$W(u_c) - W(U_c) = a_2 + b_2 \cdot (u_c - U_c) \quad (7.7)$$

Omdat de oplossing van de differentiaalvergelijking (7.3) afhankelijk is van de verwachtingswaarde van de kassaldooverandering, maken we een onderscheid tussen een verwachte kassaldooverandering per periode gelijk aan nul en een verwachte kassaldooverandering per periode ongelijk aan nul. We beperken ons in deze paragraaf tot het beschrijven van de methode waarmee de optimale beleidsparameters bepaald zijn voor een verwachte kassaldooverandering per periode gelijk aan nul en tot het geven van de door Constantinides (1976) verkregen resultaten voor een verwachte kassaldooverandering per periode ongelijk aan nul. Voor de formele bepaling van de optimale beleidsparameters bij een verwachte saldooverandering per periode gelijk aan nul verwijzen we naar bijlage F (blz. 227).

Bepaling van de optimale beleidsparameters bij een verwachtingswaarde gelijk aan nul

Omdat het referentieniveau van de potentiële kostenfunctie willekeurig gekozen mag worden stellen we dit gelijk aan nul:

$$W(0) \equiv 0.$$

Bij een verwachte kassaldooverandering per periode gelijk aan nul wordt na substitutie van (7.1) de oplossing van (7.3):

$$-W(x) = x \cdot W'(0) + (1/\sigma^2)(\gamma \cdot x^2 - h \cdot x^3/3), \quad 0 \leq x \leq u \quad (7.8)$$

$$= x \cdot W'(0) + (1/\sigma^2)(\gamma \cdot x^2 + s \cdot x^3/3), \quad d \leq x \leq 0 \quad (7.9)$$

Omdat de potentiële kostenfunctie voor waarden van x kleiner dan nul verschilt van die voor waarden groter dan nul moet er bij de bepaling

van de optimale beleidsparameters een onderscheid gemaakt worden tussen de volgende drie mogelijkheden:

$$1) \quad d_c < 0 < D_c < U_c < u_c ;$$

$$2) \quad d_c < D_c < 0 < U_c < u_c ;$$

$$3) \quad d_c < D_c < U_c < 0 < u_c .$$

De mogelijkheden dat bij een optimaal beleid alle vier de beleidsparameters kleiner dan of groter dan nul zijn behoeven niet onderzocht te worden omdat dit nooit optimaal kan zijn. Immers dan is er altijd een onnodige positieve of negatieve voorraad.

Constantinides (1976) heeft de optimale beleidsparameters bepaald uitgaande van de tweede mogelijkheid. De door hem gebruikte methode is echter slechts gedeeltelijk toepasbaar bij de eerste en derde mogelijkheid omdat de controlegrens en het bijbehorende terugkeerpunt nu niet door dezelfde potentiële kostenfunctie bepaald worden. Wij zullen de bepaling van de optimale beleidsparameters beschrijven uitgaande van de eerste mogelijkheid en vervolgens de resultaten vermelden die verkregen worden indien men uitgaat van de tweede of derde mogelijkheid.

$$\underline{d_c < 0 < D_c < U_c < u_c}$$

Voor de bepaling van de optimale beleidsparameters zijn de punten van de potentiële kostenfunctie, die voldoen aan de voorwaarde dat de marginale reductie van de potentiële kostenfunctie gelijk is aan de marginale transactiekosten, van belang. De punten waarin de marginale reductie gelijk is aan de marginale transactiekosten bij een kassaldovermindering noemen we U_{c1} en U_{c2} met $U_{c1} < U_{c2}$.

Deze zijn uit (7.7) en (7.8) te bepalen als:

$$U_{c1} = \gamma/h - (1/h)[\gamma^2 - h \cdot \sigma^2(b_2 - w^*(0))]^{1/2} \quad (7.10)$$

$$U_{c2} = \gamma/h + (1/h)[\gamma^2 - h \cdot \sigma^2(b_2 - w^*(0))]^{1/2} \quad (7.11)$$

Deze wortels zijn reëel, indien:

$$\gamma^2 \geq h \cdot \sigma^2(b_2 - W'(0)) \quad (7.12)$$

Bovendien geldt $0 \leq U_{c1}$, indien tevens voldaan wordt aan:

$$b_2 - W'(0) \geq 0 \quad (7.13)$$

De punten waarin de marginale reductie van de potentiële kostenfunctie gelijk is aan de marginale transactiekosten verbonden met een kassaldo-vermeerdering noemen we D_{c1} en D_{c2} met $D_{c1} \leq D_{c2}$, als ze bepaald worden door (7.8) en D_{c3} als deze bepaald worden door (7.9).

Uit (7.8) en (7.6) volgt:

$$D_{c1} = \gamma/h - (1/h)[\gamma^2 + h \cdot \sigma^2(b_1 + W'(0))]^{1/2} \quad (7.14)$$

$$D_{c2} = \gamma/h + (1/h)[\gamma^2 + h \cdot \sigma^2(b_1 + W'(0))]^{1/2} \quad (7.15)$$

Is

$$\gamma^2 \geq -h \cdot \sigma^2(b_1 + W'(0)) \quad (7.16)$$

en

$$b_1 + W'(0) \leq 0 \quad (7.17)$$

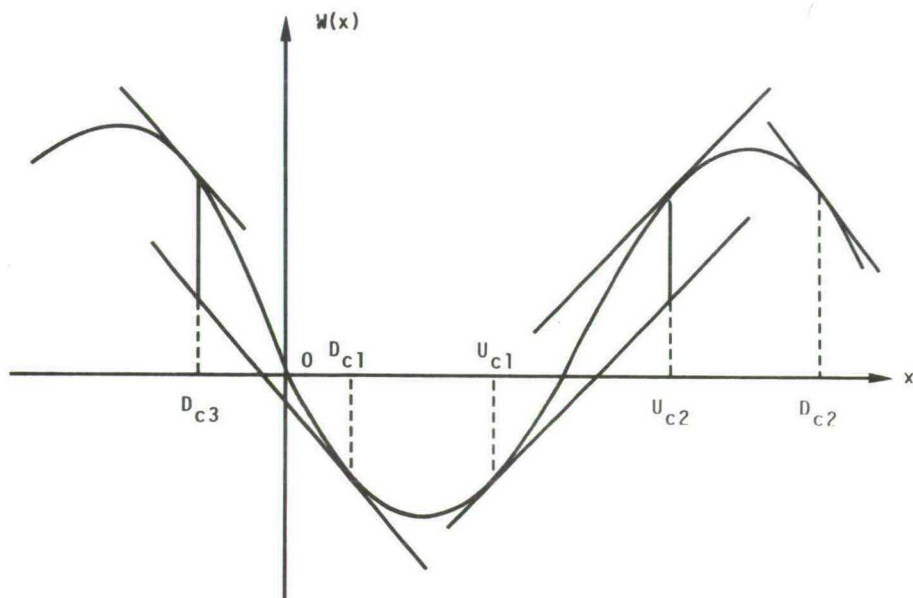
dan zijn beide wortels reëel en geldt bovendien $0 \leq D_{c1} \leq U_{c1} \leq U_{c2} \leq D_{c2}$.

Uit (7.9) en (7.6) volgt dan dat er slechts een punt op $(-\infty, 0)$ dat ook aan (7.17) voldoet. We noemen dit punt D_{c3} :

$$D_{c3} = -\gamma/s - (1/s)[\gamma^2 - s \cdot \sigma^2(b_1 + W'(0))]^{1/2} \quad (7.18)$$

De gevonden punten U_{c1} , U_{c2} , D_{c1} , D_{c2} en D_{c3} zijn aangegeven in de in figuur 7.1 getekende potentiële kostenfunctie welke aan de voorwaarden

(7.12), (7.13), (7.16) en (7.17) voldoet. Bij de interpretaties van deze figuur moeten we ons realiseren dat voor $W(0)$ de waarde nul gekozen is en dat de getekende situatie geldt als de kosten van tekort duidelijk groter zijn dan die van het in voorraad houden.



Figuur 7.1 Een potentiële kostenfunctie met $d_c < 0 < D_c < U_c < u_c$

Zoals uit figuur 7.1 volgt zal, indien er bij een optimaal beleid een kassaldovermindering door middel van een transactie plaatsvindt, dit altijd gebeuren tot U_{c1} . Immers tussen U_{c1} en U_{c2} is de marginale reductie van de potentiële kostenfunctie groter dan b_2 . Het saldo $x = U_{c2}$ kan dus niet het optimale bovenste terugkeerpunt zijn, omdat een verdere reductie van de kosten verkregen kan worden door het saldo te verminderen tot een waarde kleiner dan U_{c2} .

Bij een optimaal beleid zal alleen maar een transactie, die het saldo verminderd, uitgevoerd worden als de reductie van de potentiële kostenfunctie minstens even groot is als de aan de transactie verbonden kosten. Zoals uit figuur 7.1 blijkt, is de totale kostenreductie maximaal,

indien de kassaldovermindering plaatsvindt vanuit U_{c2} . Voor het bestaan van een optimaal bovenste terugkeerpunt moet dus gelden:

$$W(U_{c2}) - W(U_{c1}) > a_2 + b_2 \cdot (U_{c2} - U_{c1}) \quad (7.19)$$

Eveneens volgt uit figuur 7.1 dat indien er bij een optimaal beleid een kassaldovermeerdering door middel van een transactie plaatsvindt, dit altijd zal zijn tot D_{c1} . Tevens geldt dat voor het bestaan van een optimaal onderste terugkeerpunt in de gestelde situatie, moet gelden:

$$W(D_{c3}) - W(D_{c1}) > a_1 + b_1 \cdot (D_{c1} - D_{c3}) \quad (7.20)$$

Substitutie van (7.10) en (7.11) in (7.19) en van (7.14) en (7.18) in (7.20) geeft twee ongelijkheden met als onbekende variabelen γ en $W'(0)$. In bijlage G (blz. 233) wordt bewezen dat de minimale γ die aan de voorwaarden (7.12), (7.13), (7.16) en (7.17) voldoet te bepalen is door (7.19) en (7.20) als gelijkheden te schrijven indien de probleemparameters aan de twee volgende voorwaarden voldoen:

$$-\sigma^2 \cdot h(b_1 + b_2) > (3h^2 \cdot \sigma^2 \cdot a_2 / 4)^{2/3} - (3s^2 \cdot \sigma^2 \cdot a_1 / 4)^{2/3} \quad (7.21)$$

$$s < 3h.$$

Bovendien volgt uit het genoemde bewijs dat de optimale beleidsparameters: d_c , D_c , U_c en u_c gelijk zijn aan respectievelijk: D_{c3} , D_{c1} , U_{c1} en U_{c2} . Door substituties zijn nu de minimaal verwachte kosten per tijdseenheid als een impliciete functie van de probleemparameters te schrijven en de optimale beleidsparameters als functies van de minimaal verwachte kosten per tijdseenheid en de probleemparameters. Deze formules worden gegeven in bijlage F (blz. 227).

$$\underline{d_c < D_c < 0 < U_c < u_c}$$

De bepaling van de optimale beleidsparameters is uitgaande van de tweede mogelijkheid duidelijk eenvoudiger omdat d_c en D_c nu uit dezelfde potentiële kostenfunctie (7.9) volgen en omdat ook de minimaal verwachte kosten per tijdseenheid direct te bepalen zijn. Voldoen de probleemparameters aan:

$$-\sigma^2 \cdot h(b_1 + b_2) < (3h^2 \sigma^2 a_2 / 4)^{2/3} - (3s^2 \sigma^2 a_1 / 4)^{2/3} < \sigma^2 (b_1 + b_2) \quad (7.22)$$

dan kunnen de optimale beleidsparameters en het kwadraat van de verwachte kosten per tijdseenheid gegeven worden door:

$$u_c = \gamma/h + (1/h)(3h^2 \sigma^2 a_2 / 4)^{1/3}$$

$$U_c = \gamma/h - (1/h)(3h^2 \sigma^2 a_2 / 4)^{1/3}$$

$$D_c = -\gamma/s + (1/s)(3s^2 \sigma^2 a_1 / 4)^{1/3}$$

$$d_c = -\gamma/s - (1/s)(3s^2 \sigma^2 a_1 / 4)^{1/3}$$

$$\begin{aligned} \gamma^2 = & (\sigma^2 h s / (h+s))(b_1 + b_2) + (s/(h+s))(3h^2 \sigma^2 a_2 / 4)^{2/3} \\ & + (h/(h+s))(3s^2 \sigma^2 a_1 / 4)^{2/3} \end{aligned}$$

De structuur van de formules voor de bovenste controlegrens en het bovenste terugkeerpunt is dezelfde als bij de eerste mogelijkheid. Dit geldt niet voor het onderste terugkeerpunt en de onderste controlegrens.

$$\underline{d_c < D_c < U_c < 0 < u_c}$$

De bepaling van de optimale beleidsparameters uitgaande van de derde mogelijkheid kan op eenzelfde wijze gebeuren als beschreven voor de eerste mogelijkheid. Aan de derde mogelijkheid wordt voldaan indien voor de probleemparameters de volgende twee voorwaarden gelden:

$$(3h^2\sigma^2a_2/4)^{2/3} - (3s^2\sigma^2a_1/4)^{2/3} > s\cdot\sigma^2(b_1+b_2) \quad (7.23)$$

$$h < 3s.$$

De bijbehorende optimale beleidsparameters en verwachte kosten per tijdseenheid staan eveneens in bijlage F (blz. 227).

Eigenschappen van de resultaten

Voor een verwachte kassaldoverandering per periode gelijk aan nul gelden de volgende eigenschappen:

1. De optimale beleidsparameters zijn gegeven de verwachte kostenvoet en de waarden van de probleemparemeters eenvoudig te berekenen. De verwachte kostenvoet is te benaderen met behulp van de Regular Falsi.
2. Zijn er geen vaste kosten verbonden aan een transactie dan kunnen de formules voor de bijbehorende beleidsparameters aanzienlijk vereenvoudigd worden, evenals indien er geen variabele kosten verbonden zijn aan een transactie.
3. Het belangrijkste verschil bij het optimale beleid in $D_c - d_c$ en $u_c - U_c$, de optimale transactie-omvang, is dat indien het teken van het kassaldo bij een transactie ongewijzigd blijft de transactie-omvang alleen afhankelijk is van de variantie, de vaste transactiekosten en de bij het saldo behorende "voorraadkosten". Treedt er ten gevolge van een transactie een tekenwijziging in het kassaldo op dan is de transactie-omvang afhankelijk van alle probleemparemeters.
4. Zijn zowel de controlegrens als het bijbehorende terugkeerpunt positief of negatief, dan is de structuur van de formule ter bepaling van de optimale transactie-omvang zowel bij een kassaldovermeerdering als bij een kassaldovermindering gelijk aan die van een kassaldovermindering in het model van Miller en Orr (1966).
5. Omdat de optimale beleidsparameters bij continue controle aan dezelfde proportionaliteitseigenschappen voldoen als de optimale beleidsparameters bij periodieke controle mogen ook de resultaten uit de berekeningen bij continue controle gegeneraliseerd worden.

Bepaling van de optimale beleidsparameters bij een verwachtingswaarde ongelijk aan nul

Zijn de verwachte saldooveranderingen per periode ongelijk aan nul, dan is het alleen maar mogelijk om de optimale beleidsparameters expliciet te bepalen als er geen vaste transactiekosten zijn. Omdat bij alleen proportionele transactiekosten de optimale controlegrens en het bijbehorende terugkeerpunt samenvallen behoeft er geen onderscheid gemaakt te worden tussen verschillende mogelijkheden omdat bij een optimaal beleid de samenvallende beleidsparameters elk aan een zijde van het nulpunt moeten liggen. Anders ontstaat er immers permanent een onnodig positief of negatief kassaldo.

De optimale beleidsparameters zijn nu te bepalen [zie Constantinides (1976), blz. 1327-1329] door het oplossen van (7.3) onder de voorwaarden (7.4), (7.5) en

$$W''(D) = 0;$$

$$W''(U) = 0,$$

Hieruit volgt

$$U_c = \gamma/h + \mu b_2/h; \quad (7.24)$$

$$D_c = -\gamma/s + \mu b_1/s; \quad (7.25)$$

$$h[1 - \exp(-2\mu\gamma/(\sigma^2 h)) - 2\mu^2 b_2/(\sigma^2 h)] =$$

$$s[-1 + \exp(2\mu\gamma/(\sigma^2 s)) - 2\mu^2 b_1/(\sigma^2 s)],$$

zodat ook de optimale beleidsparameters bij een verwachte kassaldooverandering per periode ongelijk aan nul en alleen proportionele transactiekosten eenduidig bepaald kunnen worden.

Gebruikmakend van de in deze paragraaf verkregen resultaten kunnen we de optimale beleidsparameters uit het continue model nu evalueren als een alternatief voor de optimale beleidsparameters uit het periodieke model.

7.5 De optimale beleidsparameters bij continue controle als alternatief voor de optimale beleidsparameters bij periodieke controle

De bruikbaarheid van de beleidsparameters uit het continue model als alternatief voor de optimale beleidsparameters uit het periodieke model is in sterke mate afhankelijk van de afwijkingen die de zojuist bepaalde beleidsparameters vertonen ten opzichte van de optimale beleidsparameters. Daarom zullen eerst de genoemde verschillen geanalyseerd worden. Vervolgens onderzoeken we de afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode die ontstaan door toepassing van de beleidsparameters uit het continue model.

Beide vergelijkingen zullen afzonderlijk gemaakt worden voor een verwachte kassaldooverandering per periode gelijk aan nul en een verwachte saldooverandering groter dan nul. Op grond van de laatstgenoemde vergelijking volgt ook de bruikbaarheid bij een verwachte saldooverandering per periode kleiner dan nul.

Een verwachte kassaldooverandering per periode gelijk aan nul

De optimale waarden van de beleidsparameters bij een verwachte kassaldooverandering per periode gelijk aan nul bij continue controle worden gegeven in tabel VII.1 van bijlage VII (blz. 266) en bij periodieke controle in tabel I.7 van bijlage I (blz. 248). De verschillen staan in tabel VII.2 van bijlage VII (blz. 267).

Zoals uit de laatstgenoemde tabel blijkt is het optimale continueringsgebied bij continue controle ($u_c - d_c$) groter dan bij periodieke controle ($u - d$) indien er transactiekosten zijn. Bovendien geldt in dat geval voor alle onderzochte combinaties van de probleemparameters $d_c < d$ en voor de meeste combinaties $u_c > u$. Het laatste geldt alleen niet als de kosten van tekort groter zijn dan de kosten van het in voorraad houden en de transactiekosten relatief klein zijn. Immers bij afwezigheid van transactiekosten is de optimale voorraad bij een optimaal beleid en $s > h$ duidelijk groter omdat hier de controle slechts periodiek plaatsvindt. Dit verandert pas als de transactiekosten noemenswaardig worden zoals ook uit tabel VII.2 (blz. 267) volgt. Ook geldt dat de minimale transac-

tie-omvang bij continue controle ($u_c - U_c$ en $D_c - d_c$) groter is dan de minimale transactie-omvang bij periodieke controle (respectievelijk $u - U$ en $D - d$).

Omdat het continueringsgebied groter is bij toepassing van de beleidsparements uit het model met continue controle en omdat $d_c < d$ zijn de verwachte transactiekosten per periode kleiner en de verwachte voorraadkosten per periode groter dan bij toepassing van de optimale beleidsparements.

De verwachte kosten per periode bij toepassing van de beleidsparements uit het model met continue controle staan in tabel VII.3 (blz. 268), die bij toepassing van de optimale beleidsparements staan in tabel IV.7 en IV.8 (blz. 259 en blz. 260) en de hieruit resulterende procentuele afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode bij toepassing van de optimale beleidsparements uit het continue model bij een verwachte kassaldooverandering per periode gelijk aan nul staan in tabel 7.1.

$a_1 = a_2$	$s = h$				$s = 3h$			
	$b = 0$	$b = h$	$b = 5h$	$b = 10h$	$b = 0$	$b = h$	$b = 5h$	$b = 10h$
0	0,0	1,7	1,1	1,0	24,7	7,3	3,4	1,1
$0,1\sigma h$	2,7	2,6	0,7	0,6	12,6	7,9	1,7	1,2
σh	2,9	1,7	1,4	0,7	6,8	5,2	1,9	1,2
$10\sigma h$	1,9	1,5	1,0	0,4	3,0	2,6	1,1	0,8

Tabel 7.1 De procentuele afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode bij toepassing van de optimale beleidsparements uit het continue model ($\mu = 0$)

Zoals uit deze tabel blijkt is de procentuele afwijking in de meeste gevallen vrij gering. Dit geldt voor alle gevallen waarin de variabele kosten van het in voorraad houden en van tekort aan elkaar gelijk zijn. Zijn deze kosten niet aan elkaar gelijk en zijn de vaste transactiekosten relatief klein, dan is het resultaat met de optimale beleidsparements uit het continue model minder goed. Dit wordt veroorzaakt doordat

bij continue controle de waarde van de onderste controlegrens altijd kleiner dan of gelijk aan nul is, omdat er anders een onnodige permanente positieve voorraad ontstaat, terwijl bij een optimaal beleid bij periodieke controle de onderste controlegrens positief kan zijn, bijvoorbeeld indien $b_1 = b_2 > 2h$ en $s = 3h$ en $a_1 = a_2 = 0$.

Uit de resultaten van Inderfurth (1977) is gebleken, dat de lineaire beslissingsregel redelijke resultaten geeft bij een verwachte kassaldoverandering per periode gelijk aan nul en alleen variabele transactiekosten. Daarom vergelijken we deze resultaten met die uit het continue model. De verwachte kosten per periode bij toepassing van de optimale beleidsparameters (C), bij toepassing van de beleidsparameters uit het continue model (C_c) en bij toepassing van de lineaire beslissingsregel (C_L) worden gegeven in tabel 7.2. Zoals uit tabel 7.2 blijkt geeft de lineaire beslissingsregel betere resultaten als er geen vaste transactiekosten zijn voor $s = 3h$ en $b_1 = b_2 < 1,5h$.

Zijn de vaste transactiekosten gelijk aan 0,10h dan geeft de lineaire beslissingsregel betere resultaten voor $s = 3h$ en $b_1 = b_2 < h$ zoals uit tabel 7.2 en tabel VII.3 (blz. 268) af te leiden is. Dat de lineaire beslissingsregel betere resultaten geeft voor $s = 3h$ komt omdat indien er geen transactiekosten zijn de optimale voorraad bij toepassing van de lineaire beslissingsregel hetzelfde is als bij een optimaal beleid, terwijl uitgaande van continue controle de optimale voorraad dan juist sterk afwijkt.

$b_1=b_2$	$s = h$			$s = 3h$		
	C	C_c	C_L	C	C_c	C_L
0	0,80	0,80	0,80	1,28	1,59	1,28
0,5h	1,10	1,13	1,13	1,60	1,74	1,62
h	1,32	1,34	1,38	1,85	1,98	1,91
1,5h	1,50	1,52	1,60	2,06	2,15	2,16
5h	2,40	2,42	2,65	3,11	3,22	3,43
10h	3,28	3,31	3,66	4,15	4,19	4,68

Tabel 7.2 De verwachte kosten per periode bij toepassing van de optimale beleidsparameters (C), de optimale beleidsparameters uit het continue model (C_c) en de lineaire beslissingsregel (C_L) voor $a_1 = a_2 = 0,10h$ en $\mu = 0$

Voor de bepaling van de bruikbaarheid van elke sub-optimale beslissingsregel is de procentuele afwijking van de minimaal verwachte kosten slechts een indicatie voor de bruikbaarheid. De keuze van de te hanteren methode voor de berekening van de beleidsparameters wordt bepaald door de absolute afwijking van de minimaal verwachte kosten per periode en door de eenvoud van de berekeningsmethode. De absolute verschillen tussen de verwachte kosten per periode bij toepassing van de optimale beleidsparameters uit het model met continue controle en de minimaal verwachte kosten per periode zijn te berekenen uit tabel VII.3 van bijlage VII (blz. 268) en de tabellen IV.8 en IV.9 van bijlage IV (blz. 260 en 261).

Zijn de kosten van het in voorraad houden gelijk aan die van tekort dan bedraagt de maximale absolute afwijking van de minimaal verwachte kosten per periode bij toepassing van de optimale beleidsparameters uit het continue model 0,0390h en indien er transactiekosten zijn en de kosten van tekort driemaal de kosten van het in voorraad houden bedragen, is de maximale afwijking 0,1700h. Deze absolute afwijking is duidelijk lager indien de vaste transactiekosten noemenswaardig zijn zoals ook uit de procentuele verschillen af te leiden is.

Een verwachte kassaldooverandering per periode groter dan nul

Is de verwachte kassaldooverandering per periode groter dan nul, dan zijn, zoals in paragraaf 7.4 gebleken is, de optimale beleidsparameters bij continue controle alleen maar eenvoudig te bepalen als er geen vaste transactiekosten zijn. De resultaten voor een verwachte kassaldooverandering groter dan nul staan vermeld in tabel VII.4 (blz. 268), terwijl de verschillen tussen deze en de optimale beleidsparameters vermeld worden in tabel VII.5 (blz. 269).

Zoals uit laatstgenoemde tabel blijkt, is het continueringsgebied bij variabele transactiekosten bij continue controle groter dan bij periodieke controle. Het verschil is bovendien groter naarmate de variatiecoëfficiënt groter is. Evenals bij een verwachte kassaldooverandering per periode gelijk aan nul geldt nu ook $d_c < d$, doch in de meeste gevallen niet $u_c > u$, zoals bij een verwachtingswaarde gelijk aan nul.

De verwachte kosten per periode bij gebruik van de beleidsparameters uit het continue model staan in tabel VII.6 (blz. 269). De procentuele afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode bij gebruik van de optimale beleidsparameters uit het continue model staan voor een verwachtingswaarde groter dan nul in tabel 7.3.

$b_1=b_2$	$s = h$			$s = 3h$		
	$\sigma = 0,5\mu$	$\sigma = \mu$	$\sigma = 3\mu$	$\sigma = 0,5\mu$	$\sigma = \mu$	$\sigma = 3\mu$
0	154,5	46,6	5,5	375,0	162,0	58,8
h	50,3	30,5	6,3	144,4	97,6	32,0
5h	13,0	9,6	3,8	42,0	35,8	11,8
10h	5,8	5,9	2,1	22,2	15,9	10,8

Tabel 7.3 De procentuele afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode bij toepassing van optimale beleidsparameters uit het continue model en $a_1 = a_2 = 0$ en $\mu > 0$

Zoals uit deze tabel blijkt, vormen de beleidsparameters bij het continue model bij een verwachte kassaldooverandering per periode groter dan nul geen adequaat alternatief voor de optimale beleidsparameters. Dit slechte resultaat met de beleidsparameters uit het continue model wordt veroorzaakt door dat bij continue controle de onderste controlegrens altijd kleiner dan of gelijk aan nul is, terwijl de onderste controlegrens bij een optimaal beleid zoals uit de tabellen I.1 t/m I.6 (blz. 242 t/m blz. 247) blijkt, altijd groter is dan $0,89\sigma$, voor $s = h$ en groter dan $1,33\sigma$ voor $s = 3h$. Hierdoor zijn met name de verwachte voorraadkosten per periode duidelijk lager bij een optimaal beleid. Het ligt voor de hand dat ook bij een verwachte kassaldooverandering per periode kleiner dan nul geen goede resultaten verkregen worden door gebruik te maken van de beleidsparameters uit het continue model.

7.6 Conclusies

In dit hoofdstuk zijn de optimale beleidsparameters uitgaande van continue controle bepaald en geëvalueerd als alternatief voor de optimale beleidsparameters bij periodieke controle. We kunnen de resultaten als volgt samenvatten:

1. Is de verwachte kassaldooverandering per periode gelijk aan nul dan zijn de optimale beleidsparameters uit het continue model eenvoudiger te berekenen dan die uit het periodieke model. De afwijkingen van de minimaal verwachte kosten die ontstaan door toepassing van de uit het continue model berekende beleidsparameters zijn in het algemeen duidelijk lager dan die verkregen worden door gebruik te maken van de lineaire beslissingsregel. Laat men de parametercombinaties met relatief lage vaste transactiekosten buiten beschouwing dan zal de maximale procentuele afwijking hoogstens 5% en de maximale absolute afwijking hoogstens 0,120h bedragen.

2. Is de verwachte kassaldooverandering per periode ongelijk aan nul en zijn er geen vaste kosten met een transactie verbonden, dan zijn de optimale beleidsparameters uit het model met continue controle eenvoudiger te berekenen dan die uit het model met periodieke controle. De optimale

beleidsparameters uit het model met continue controle zijn echter in het algemeen niet bruikbaar als alternatief voor de optimale beleidsparameters van het model met periodieke controle.

HOOFDSTUK 8

BENADERINGEN VOOR DE OPTIMALE BELEIDSPARAMETERS

8.1 Inleiding

In de voorafgaande hoofdstukken hebben wij onderzocht in hoeverre de sub-optimale beslissingsregels voor het liquiditeitsprobleem te gebruiken zijn als alternatief voor het optimale liquiditeitsbeleid. De belangrijkste conclusies hieruit kunnen we als volgt samenvatten:

1. is de verwachte kassaldooverandering per periode gelijk aan nul en worden de beleidsparameters uit het model met continue controle gebruikt in plaats van de optimale beleidsparameters, dan zijn de verwachte kosten per periode hierdoor niet noemenswaardig hoger indien door de probleemparameters aan nauwelijks beperkende voorwaarden voldaan wordt;
2. is de verwachte kassaldooverandering per periode echter groter dan nul, dan is de bruikbaarheid van sub-optimale beslissingsregels afhankelijk van de verhoudingen tussen de probleemparameters. In het algemeen kan men stellen dat de resultaten voor problemen met een kleine variatiecoëfficiënt (< 1) duidelijk beter zijn dan voor problemen met een grote variatiecoëfficiënt (> 3). Wel is bij problemen met een kleine variatiecoëfficiënt de bruikbaarheid van zowel de voorraadtheoretische benadering als van de "optimale" lineaire beslissingsregel afhankelijk van de verhoudingen tussen de kostenparameters.

Uit de eerste conclusie volgt dat de optimale beleidsparameters benaderd mogen worden door gebruik te maken van de resultaten uit hoofdstuk 7, indien de verwachte kassaldooverandering per periode gelijk aan nul is. Voor een verwachte saldooverandering per periode ongelijk aan nul beschikken we nog niet over een soortgelijk resultaat zoals uit de tweede conclusie volgt. Daarom zullen in dit hoofdstuk een aantal benaderingen voor de optimale beleidsparameters geconstrueerd worden. Deze benaderingen zijn echter niet, gebaseerd op wijzigingen in de modelveronderstellingen ten opzichte van het oorspronkelijk gestelde probleem, zoals bij

de tot nu toe besproken sub-optimale beslissingsregels, doch op de eigenschappen van de optimale beleidsparameters zoals vermeld in paragraaf 3.5 en op de resultaten verkregen met de besproken sub-optimale beslissingsregels in de hoofdstukken 5, 6 en 7.

Aan de te construeren benaderingsformules stellen we de drie volgende voorwaarden:

1. De beleidsparameters moeten hiermee op een eenvoudige wijze te berekenen zijn.
2. De benaderde beleidsparameters moeten aan dezelfde proportionaliteitseigenschappen voldoen, waaraan ook door de optimale beleidsparameters voldaan wordt.
3. De verwachte kosten per periode bij toepassing van de geconstrueerde beleidsparameters mogen niet noemenswaardig hoger zijn dan bij toepassing van de optimale beleidsparameters.

Voor een verwachte kassaldooverandering per periode groter dan nul beschikken we zowel over de beleidsparameters van de optimale beslissingsregel als over de beleidsparameters bij toepassing van de sub-optimale beslissingsregels. Daarom zullen we in paragraaf 8.2 eerst hiervoor benaderingen construeren. In paragraaf 8.3 wordt vervolgens onderzocht in hoeverre deze benaderingen gewijzigd moeten worden om ook toepasbaar te zijn bij een verwachte kassaldooverandering per periode kleiner dan nul. Bij de constructie van de benaderingsformules is tot nu toe steeds verondersteld dat de transactiekosten symmetrisch zijn ($a_1 = a_2$ en $b_1 = b_2$). In paragraaf 8.4 worden de benaderingen zodanig aangepast, dat ze ook geldig zijn indien de transactiekosten niet symmetrisch zijn.

Om tot een evaluatie van de geconstrueerde benaderingen te kunnen komen worden in paragraaf 8.5 die combinaties van probleemparameters nader onderzocht welke tot minder goede resultaten leiden. Ten slotte worden in paragraaf 8.6 de te gebruiken benaderingen voor de optimale beleidsparameters geformuleerd en worden de verkregen resultaten systematisch weergegeven.

In dit hoofdstuk zullen we bij de bespreking van de resultaten zowel aandacht schenken aan de procentuele als aan de absolute afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode die ontstaan door toepassing van de geconstrueerde benaderingen. Evenals in de voorafgaande hoofd-

stukken hanteren we de procentuele afwijking van de minimaal verwachte kosten per periode als een indicatie voor de bruikbaarheid van de geconstrueerde benaderingen. Maar in dit hoofdstuk zal ook aandacht geschonken worden aan de absolute afwijkingen omdat deze uiteindelijk bepalend zijn, gegeven de waarden van de probleemparameters, voor de keuze van de methode waarmee de beleidsparameters berekend moeten worden.

8.2 Benaderingsformules voor een verwachte kassaldooverandering per periode groter dan nul

Voor het construeren van benaderingsformules voor het liquiditeitsprobleem met een verwachte kassaldooverandering per periode groter dan nul maken we gebruik van het in paragraaf 6.5 gevonden resultaat dat de optimale normvoorraad van de lineaire beslissingsregel met variabele beslissingsperiode (θ_m) en alleen vaste transactiekosten een goede benadering geeft voor de waarde van het onderste terugkeerpunt (D).

In paragraaf 3.5 is gebleken dat de proportionele transactiekosten slechts een geringe invloed hebben op de waarde van het optimale onderste terugkeerpunt indien de variatiecoëfficiënt niet al te groot is. Daarom zal de genoemde normvoorraad ook een goede benadering geven voor het onderste terugkeerpunt indien de variatiecoëfficiënt niet al te groot is en er zowel vaste als proportionele transactiekosten zijn.

Voor de benadering van de drie overige beleidsparameters maken we gebruik van de volgende, in paragraaf 3.5, gevonden verbanden:

- De omvang van de proportionele transactiekosten heeft een duidelijke invloed op de afstand tussen de twee terugkeerpunten D en U.
- De omvang van de vaste transactiekosten heeft een duidelijke invloed op de omvang van de minimale transactie-omvang.

Omdat we door gebruik te maken van de normvoorraad beschikken over een benadering voor het onderste terugkeerpunt kunnen we door gebruik te maken van het als eerste genoemde verband ook een benadering construeren voor het bovenste terugkeerpunt. De controlegrenzen kunnen we vervolgens benaderen door gebruik te maken van het als tweede genoemde verband. Achtereenvolgens zullen we een benaderingsformule construeren voor:

- Het onderste terugkeerpunt (D).
- Het verschil tussen de terugkeerpunten (U-D).

- De minimale transactie-omvang bij een kassaldovermindering ($u-U$).
- De minimale transactie-omvang bij een kassaldovermeerdering ($D-d$).

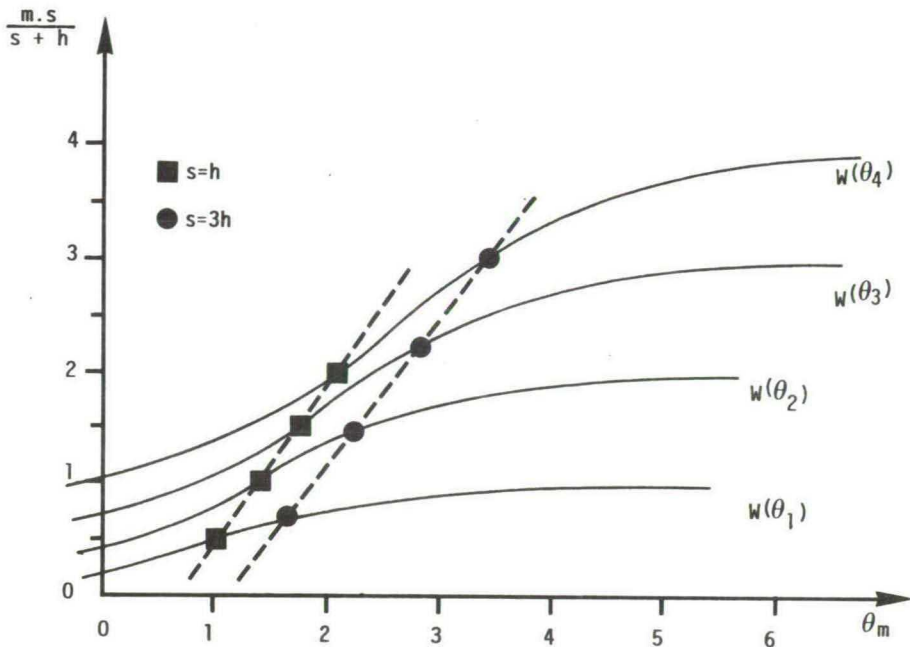
Gebruikmakend van de met deze benaderde beleidsparemeters berekende verwachte kosten per periode zullen we vervolgens het resultaat evalueren. De benaderingen voor de optimale beleidsparemeters zullen we voorzien van een subscript b .

Een benadering voor het onderste terugkeerpunt

In paragraaf 6.5 is gebleken dat de optimale normvoorraad van de lineaire beslissingsregel met variabele beslissingsperiode (θ_m) een goede benadering geeft voor de waarde van het optimale onderste terugkeerpunt (D) indien er alleen vaste transactiekosten zijn. De in paragraaf 6.4 gebruikte methode ter bepaling van die optimale normvoorraad is echter nogal omslachtig en daarom voor praktische toepassing minder geschikt. Immers, bij deze methode moet eerst de optimale normvoorraad voor verschillende lengtes van de beslissingsperiode berekend worden door gebruik te maken van (6.48). Vervolgens kan de optimale lengte van de beslissingsperiode worden bepaald door die lengte te kiezen waarvoor de som van (6.49) en (6.50) minimaal is.

Uit de in paragraaf 6.5 gemaakte berekeningen bleek echter dat er bij benadering een lineair verband bestaat tussen de optimale normvoorraad en de bijbehorende lengte van de beslissingsperiode. Dit wordt voor $\sigma = \mu$ geïllustreerd in figuur 8.1. In deze figuur zijn voor $s = h$ en $s = 3h$ de optimale waarden van θ_m aangegeven voor een aantal waarden van m . Dit zijn de waarden waarvoor geldt: $W(\theta_m) = m \cdot s / (h+s)$.

Om te onderzoeken of het gesignaleerde lineaire verband te gebruiken is voor het construeren van een eenvoudig te berekenen benadering hebben we dit verband nader onderzocht. Enige resultaten worden vermeld in tabel VIII.1 van bijlage VIII (blz. 270).



Figuur 8.1 Het verband tussen θ_m en m voor $\sigma = \mu$

Uit de genoemde resultaten blijkt dat de verandering in de optimale normvoorraad bij een vermeerdering van de lengte van de beslissingsperiode, op een tamelijk complexe wijze afhankelijk is van de probleemparameters h , s , μ en σ . Daarom maken wij voor de benadering van deze verandering gebruik van het feit dat deze in het algemeen goed benaderd wordt door: $\mu \cdot s / (s+h)$. Deze waarde is gelijk aan de verandering in de optimale normvoorraad bij een vermeerdering van de lengte van de beslissingsperiode in een deterministisch model met een continue vraag van μ eenheden per tijdseenheid, zoals in bijlage H.1 wordt aangetoond. We benaderen daarom de optimale normvoorraad voor een beslissingsperiode van m tijdsperioden door:

$$\theta_{m,b} = \theta_1 + (m-1) \cdot \mu \cdot s / (h+s) \quad (8.1)$$

Ter vereenvoudiging maken we voorts gebruik van de mogelijkheid om de optimale normvoorraad van de lineaire beslissingsregel bij een beslis-

singsperiode van één tijdsperiode (θ_1), welke te bepalen is uit:

$$\Phi\left(\frac{\theta_1^{-\mu}}{\sigma}\right) = \frac{s}{h+s}$$

voor $0,25 \leq s/(h+s) \leq 0,75$ te benaderen door:

$$\theta_{1,b} = \mu + 2,7 \times [s/(h+s) - 0,5] \cdot \sigma \quad (8.2)$$

Substitutie van (8.2) in (8.1) geeft:

$$\theta_{m,b} = \mu + 2,7 \times [s/(h+s) - 0,5] \cdot \sigma + (m-1) \cdot \mu \cdot s/(h+s) \quad (8.3)$$

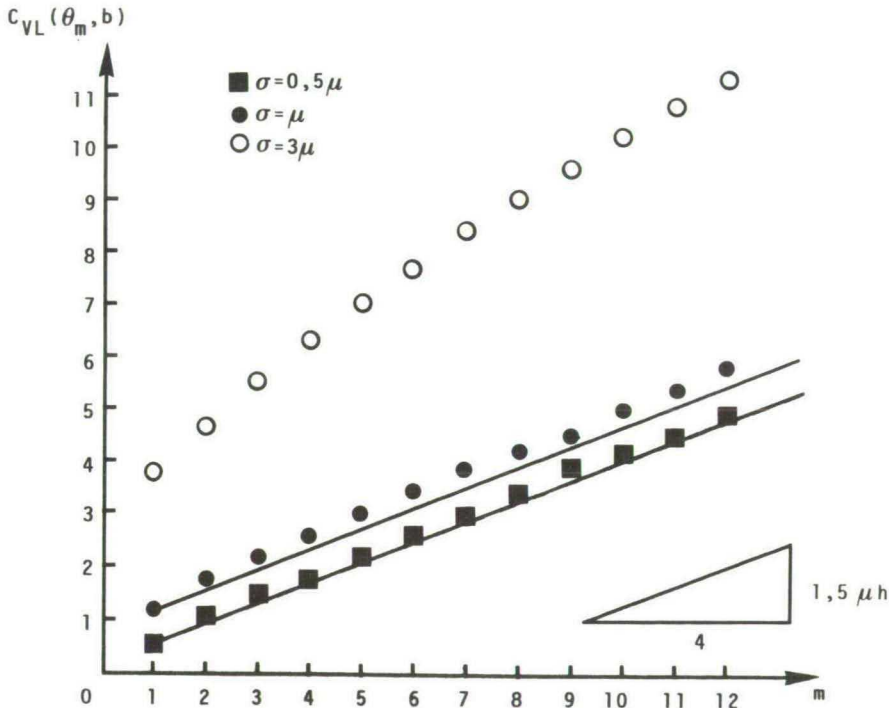
We beschikken nu over een benaderingsformule voor de optimale normvoorraad bij een gegeven lengte van de beslissingsperiode.

Voor het bepalen van de optimale lengte van de beslissingsperiode moeten de gemiddelde verwachte kosten per tijdsperiode, gegeven de benadering van de normvoorraad, geminimaliseerd worden. Deze verwachte kosten zijn in principe op eenzelfde wijze te bepalen als in paragraaf 6.4 de gemiddelde verwachte kosten per tijdsperiode bepaald zijn door (6.49) en (6.50). Alleen zijn nu, omdat $a_1 = a_2$ en $b_1 = b_2 = 0$, de gemiddelde verwachte transactiekosten per tijdsperiode gelijk aan a_2/m . De te minimaliseren functie is dus:

$$C_{L(\theta_{m,b})} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left\{ (h+s) [(\theta_{m,b}^{-i \cdot \mu}) \cdot \Phi\left(\frac{\theta_{m,b}^{-i \cdot \mu}}{\sigma \sqrt{i}}\right) + \sigma \sqrt{i} \Phi\left(\frac{\theta_{m,b}^{-i \cdot \mu}}{\sigma \sqrt{i}}\right)] - s \cdot (\theta_{m,b}^{-i \cdot \mu}) \right\} + \frac{a_2}{m}$$

Ter vereenvoudiging van deze uitdrukking hebben we het verband tussen deze gemiddelde verwachte voorraadkosten per tijdsperiode en de lengte van de beslissingsperiode berekend voor een aantal waarden van de relevante probleemparameters. De resultaten hiervan staan in tabel VIII.2 van bijlage VIII (blz. 271). Een grafische weergave van de resultaten voor $s = 3h$ wordt gegeven in figuur 8.2.

Zoals ook uit figuur 8.2 blijkt nadert de verandering in de gemiddelde verwachte voorraadkosten per periode voor een niet al te hoge variatie-coëfficiënt vrij snel tot $0,5 \times (m-1) \cdot \mu \cdot h \cdot s / (h+s)$. Deze waarde is, zoals eveneens uit bijlage H.1 (blz. 240) volgt, gelijk aan de marginale verandering van de gemiddelde kosten per periode in het deterministische model bij een optimaal beleid en een continue vraag van μ eenheden per tijdseenheid.



Figuur 8.2 De gemiddelde verwachte voorraadkosten, uitgedrukt in eenheden μh , bij een beslissingsperiode van m tijdspannen voor $s = 3h$ en $\mu > 0$

Uit het voorafgaande volgt nu dat een vrij goede benadering voor de gemiddelde verwachte voorraadkosten per periode bij een kleine variatie-coëfficiënt (< 1) reeds verkregen kan worden door:

$$C_{VL(\theta_{m,b})} = C_{VL(\theta_{1,b})} + 0,5 \times (m-1) \cdot \mu \cdot h \cdot s / (h+s). \quad (8.4)$$

Voor een grotere variatiecoëfficiënt moet deze formule echter gecorrigeerd worden omdat anders bij een kleine lengte van de beslissingsperiode de benaderde marginale verandering in de voorraadkosten te veel afwijkt van de werkelijke marginale voorraadkosten. Dit blijkt ook duidelijk uit figuur 8.2. Bij het bepalen van een correctieterm moet er voor gezorgd worden dat de resulterende formule voor de bepaling van de optimale lengte van de beslissingsperiode eenvoudig berekenbaar is en dat deze ook aan de proportionaliteitseigenschap 6.4 voldoet.

Rekening houdend met deze twee voorwaarden zijn een aantal specificaties voor de correctieterm nader onderzocht. Dit heeft geleid tot de volgende keuze van een benaderingsformule voor de gemiddelde verwachte kosten per periode bij een beslissingsperiode van m tijdsperioden en de normvoorraad gegeven door (8.3):

$$C_{L(\theta_{m,b})} = C_{VL(\theta_{1,b})} + \frac{(m-1) \cdot h \cdot s}{2(h+s)} \cdot \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2\mu m} \right) + \frac{a_2}{m} \quad (8.5)$$

Door de le afgeleide van het rechterlid van (8.5) naar m gelijk te stellen aan nul krijgen we na enige herleidingen:

$$m^2 = \frac{2a_2(h+s)}{\mu \cdot h \cdot s} - \frac{\sigma^2}{2\mu^2} \quad (8.6)$$

Omdat er in het geformuleerde liquiditeitsprobleem hoogstens eenmaal per periode een transactie plaatsvindt zijn alleen de waarden van m groter dan of gelijk aan één voor de bepaling van het onderste terugkeerpunt van belang. Daarom stellen we:

$$m_b = m, \text{ indien } m^2 > 1$$

$$m_b = 1, \text{ elders} \quad (8.7)$$

De waarde van het onderste terugkeerpunt kunnen we nu benaderen door de benaderde waarde hiervoor gelijk te stellen aan de benaderde optimale normvoorraad bij een beslissingsperiode van m tijdsperioden en het aan-

tal tijdsperioden te bepalen uit (8.7). Substitutie van m_b voor m in (8.3) geeft:

$$D_b = \mu + 2,7 \times [s/(h+s) - 0,5] \cdot \sigma + (m_b - 1) \cdot \mu \cdot s/(h+s) \quad (8.8)$$

Een vergelijking tussen de optimale en de benaderde waarden van het onderste terugkeerpunt wordt voor $b_1 = b_2 = 0$ gegeven in tabel 8.1.

$a_1 = a_2$	$\sigma = 0,5\mu$		$\sigma = \mu$		$\sigma = 3\mu$	
	D	D_b	D	D_b	D	D_b
	$s = h$					
0	1,00 μ	1,00 μ	1,00 μ	1,00 μ	1,00 μ	1,00 μ
0,1 μh	1,01 μ	1,00 μ	1,02 μ	1,00 μ	1,01 μ	1,00 μ
μh	1,45 μ	1,48 μ	1,34 μ	1,44 μ	1,15 μ	1,00 μ
10 μh	3,57 μ	3,65 μ	3,31 μ	3,64 μ	2,30 μ	3,48 μ
	$s = 3h$					
0	1,34 μ	1,34 μ	1,67 μ	1,67 μ	3,02 μ	3,02 μ
0,1 μh	1,34 μ	1,34 μ	1,68 μ	1,67 μ	3,03 μ	3,02 μ
μh	1,70 μ	1,78 μ	1,95 μ	2,02 μ	3,11 μ	3,02 μ
10 μh	4,30 μ	4,45 μ	4,23 μ	4,76 μ	4,35 μ	5,80 μ

Tabel 8.1 De optimale en benaderde waarden voor het onderste terugkeerpunt voor $b_1 = b_2 = 0$ en $\mu > 0$

Uit tabel 8.1 blijkt dat de met formule (8.8) verkregen benaderingen voor de waarde van het onderste terugkeerpunt in het algemeen vrij goed zijn. Alleen voor $a_1 = a_2 = 10\mu h$ en $\sigma = 3\mu$ zijn de afwijkingen wat aan de hoge kant. Dit wordt veroorzaakt doordat de benadering van de marginale verwachte kosten per periode nogal afwijkt van de werkelijke marginale verwachte voorraadkosten per periode bij de genoemde parametercombinaties.

Een verbetering van dit resultaat is alleen maar te bereiken door gebruik te maken van complexere formules ter bepaling van m_b of door het

laten vervallen van de eis dat aan de proportionaliteitseigenschap voldaan moet worden. We laten deze mogelijkheden voorlopig buiten de beschouwing en construeren eerst benaderingsformules voor de andere beleidsparameters. Is de invloed van de geconstateerde afwijking op de afwijking van de minimaal verwachte kosten groot, dan kan nog altijd een complexere formule geïntroduceerd worden.

Een benadering voor het verschil tussen de terugkeerpunten

We beschikken nu over een benaderingsformule voor het onderste terugkeerpunt voor $b_1 = b_2 = 0$. Uit de resultaten in bijlage X (blz. 275) blijkt dat deze resultaten ook bruikbaar zijn voor $b_1 = b_2 \neq 0$. Daarom kunnen we voor de benadering van het bovenste terugkeerpunt volstaan met het construeren van een benaderingsformule voor het verschil in waarden tussen de twee terugkeerpunten U en D. Hiertoe zijn de verschillen tussen de optimale terugkeerpunten berekend. Deze worden gegeven in tabel IX.1 van bijlage IX (blz. 272) en voor $b = 5h$ in tabel 8.2.

$a_1=a_2$	$s = h$			$s = 3h$		
	$\sigma = 0,5\mu$	$\sigma = \mu$	$\sigma = 3\mu$	$\sigma = 0,5\mu$	$\sigma = \mu$	$\sigma = 3\mu$
0	9,78 μ	10,07 μ	13,78 μ	9,68 μ	9,85 μ	12,84 μ
0,1 μh	9,86 μ	10,07 μ	13,71 μ	9,76 μ	9,87 μ	12,80 μ
μh	10,00 μ	9,99 μ	13,21 μ	10,13 μ	9,99 μ	12,49 μ
10 μh	10,02 μ	9,92 μ	11,52 μ	10,05 μ	9,93 μ	11,33 μ

Tabel 8.2 Het verschil tussen de optimale terugkeerpunten voor $b_1 = b_2 = 5h$ en $\mu > 0$

Zoals uit deze tabel blijkt is zowel de invloed van een verandering in de vaste transactiekosten als die van een verandering in de kosten van tekort op het verschil in waarden tussen de twee terugkeerpunten niet eenduidig. Hetzelfde geldt, zij het in mindere mate, voor de standaardafwijking van de kassaldooverandering per periode. Het verschil is

voor $\sigma = 3\mu$ immers altijd duidelijk groter dan voor $\sigma = 0,5\mu$ en $\sigma = \mu$. Door gebruik te maken van de in paragraaf 7.4 vermelde resultaten kan een analytische uitdrukking verkregen worden waarmee de afstand tussen de twee terugkeerpunten D en U kan worden benaderd, waarin zowel rekening gehouden wordt met de kosten van tekort als met de standaardafwijking van de kassaldooveranderingen. Uit (7.24) en (7.25) volgt:

$$U_c - D_c = \gamma \cdot \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{s} \right) + \mu \cdot \left(\frac{b_2}{h} - \frac{b_1}{s} \right) \quad (8.9)$$

Een vergelijking tussen de resultaten die verkregen worden met (8.9) en de resultaten bij een optimaal beleid toont aan dat de benadering m.b.v. (8.9) in alle gevallen behalve één, leidt tot een overschatting van de lengte van het optimale interval.

Om een betere benaderingsformule te construeren, hebben we de optimale transactie-omvang voor een deterministisch model met alleen proportionele transactiekosten en continue controle bepaald. Hieruit volgt [zie bijlage H.2 (blz. 241)] dat voor D groter dan nul, hetgeen bij de gekozen waarden van de probleemparameters altijd het geval is, het kassaldo groter moet zijn dan $D + (b_1 + b_2) \cdot \mu / h$ om bij een optimaal beleid een saldoovermindering toe te passen.

Op grond van dit resultaat gebruiken we als benadering voor de afstand tussen de beide terugkeerpunten:

$$U_b - D_b = (b_1 + b_2) \cdot \mu / h \quad (8.10)$$

Uit berekeningen voor de gekozen waarden van $b_1 = b_2$ volgt dat (8.10) een betere benadering voor de optimale afstand tussen de beide terugkeerpunten D en U geeft dan (8.9) indien $\sigma = 0,5$ of $\sigma = \mu$ of $\sigma = 3\mu$ en $a > \mu h$. Bovendien is (8.10) eenvoudiger berekenbaar dan (8.9). De invloed op de verwachte kosten per periode van het geen rekening houden met de standaardafwijking van de kassaldooveranderingen per periode zullen we bij de evaluatie in paragraaf 8.5 analyseren.

Een benadering voor de minimale transactie-omvang bij een kassaldoovermindering

Voor de constructie van een benaderingsformule voor de minimale transactie-omvang zijn de waarden van de minimale transactie-omvang bij een optimaal beleid berekend. De resultaten hiervan worden gegeven in tabel IX.2 en tabel IX.3 van bijlage IX (blz. 273 en 274). Een voorbeeld van deze resultaten voor de minimale transactie-omvang bij een kassaldoovermindering ($u-U$) wordt gegeven in tabel 8.3 voor $b_1 = b_2 = h$

$a_1=a_2$	$s = h$			$s = 3h$		
	$\sigma = 0,5\mu$	$\sigma = \mu$	$\sigma = 3\mu$	$\sigma = 0,5\mu$	$\sigma = \mu$	$\sigma = 3\mu$
$0,1\mu h$	$0,45\mu$	$0,50\mu$	$0,74\mu$	$0,45\mu$	$0,51\mu$	$0,73\mu$
μh	$1,41\mu$	$1,55\mu$	$2,36\mu$	$1,42\mu$	$1,52\mu$	$2,35\mu$
$10\mu h$	$4,48\mu$	$4,60\mu$	$6,72\mu$	$4,53\mu$	$4,60\mu$	$6,73\mu$

Tabel 8.3 De minimale transactie-omvang van een kassaldoovermindering bij een optimaal beleid voor $b_1 = b_2 = h$ en $\mu > 0$

Zoals uit tabel 8.3 blijkt is de minimale transactie-omvang bij een kassaldoovermindering afhankelijk van de vaste transactiekosten verbonden met een kassaldoovermindering en de standaardafwijking van de kassaldo-verandering per periode. Bovendien mogen we uit de resultaten in tabel IX.2 concluderen dat voor een verwachte kassaldooverandering per periode groter dan nul, de minimale transactie-omvang bij een kassaldoovermindering nagenoeg onafhankelijk is van de waarde van de variabele transactiekosten en de verhouding tussen de voorraadkosten en de kosten van tekort.

Het is op grond van de gevonden resultaten voor de hand liggend om voor de benadering van de transactie-omvang gebruik te maken van de door Frenkel en Jovanovic (1980) ontwikkelde formule. Zij benaderden de optimale transactie-omvang voor het stochastische liquiditeitsprobleem met

continue controle en een door de beslisser gespecificeerde ondergrens door:

$$Q = \{2a_1 \cdot \sigma^2 / [(\mu^2 + 2h \cdot \sigma^2)^{0,5} - \mu]\}^{0,5} \quad (8.11)$$

Omdat zij bij hun benadering gebruik maakten van een kwadratische waardefunctie mag (8.11) ook gebruikt worden voor het bepalen van de transactie-omvang bij een kassaldoevermindering indien men a_1 door a_2 vervangt.

De door (8.11) gespecificeerde transactie-omvang voldoet wel aan de voor de optimale beleidsparameters geldende tweede proportionaliteitseigenschap doch niet aan de eerste. Daarom hebben we eerst de door (8.11) gespecificeerde transactie-omvang voor verschillende waarden van de probleemparameters en $h = 1$ berekend. De resultaten worden vermeld in tabel 8.4.

a_2	$\sigma = 0,5\mu$	$\sigma = \mu$	$\sigma = 3\mu$
$0,1\mu$	$0,47\mu$	$0,52\mu$	$0,73\mu$
μ	$1,49\mu$	$1,65\mu$	$2,31\mu$
10μ	$4,72\mu$	$5,22\mu$	$7,32\mu$

Tabel 8.4 De transactie-omvang berekend met (8.11), $a_1 = a_2$ en $h = 1$

Uit een vergelijking tussen de minimale transactie-omvang van een kassaldoevermindering bij een optimaal beleid (tabel 8.3) en de resultaten uit tabel 8.4 volgt dat er voor $h = 1$ een grote mate van overeenkomst is. Om generalisatie van de gevonden resultaten mogelijk te maken hebben we formule (8.11) zodanig gecorrigeerd dat ook aan de eerste proportionaliteitseigenschap voldaan wordt, terwijl de transactie-omvang voor $h = 1$ ongewijzigd blijft. Als resultaat gebruiken we voor de benadering van de minimale transactie-omvang:

$$u_b - U_b = \{2a_2 \cdot \sigma^2 / [h(\mu^2 + 2\sigma^2)^{0,5} - \mu]\}^{0,5} \quad (8.12)$$

Bij een kleine variatiecoëfficiënt reduceert de uitdrukking rechts van het gelijkteken tot de bekende formule voor de economische bestelomvang in het deterministische voorraadmodel. Immers bij een kleine variatiecoëfficiënt geldt:

$$(1+2\sigma^2/\mu^2)^{0,5} \approx 1 + \sigma^2/\mu^2,$$

zodat (8.12) dan bij benadering gelijk is aan $(2a_2 \cdot \mu/h)^{0,5}$.

Een benadering voor de minimale transactie-omvang bij een kassaldo-vermeerdering

Bij een optimaal beleid is de minimale transactie-omvang bij een kassaldo-vermeerdering (D-d) minder eenduidig voor verschillende waarden van de kosten van tekort dan bij een kassaldo-vermindering zoals uit tabel IX.3 van de bijlage IX (blz. 273) blijkt. Dit wordt met name veroorzaakt doordat de onderste controlegrens dichterbij het nulsaldo ligt, waardoor de invloed van de kosten van tekort op de minimale transactie-omvang bij een saldo-vermeerdering groter zijn dan op de minimale transactie-omvang bij een kassaldo-vermindering.

Met de kosten van tekort kan rekening gehouden worden door de bij de voorraadtheoretische benadering vermelde formule ter bepaling van de optimale bestelomvang (5.10) te gebruiken. Het nadeel hiervan is echter dat er bij de afleiding geen rekening gehouden is met de standaardafwijking en dat er niet uitgegaan is van een vooraf gespecificeerd bestelniveau. Omdat, zoals uit de berekeningen gebleken is, de genoemde nadelen groter zijn dan de voordelen, gebruiken we ter benadering van de minimale transactie-omvang bij een kassaldo-vermeerdering een formule overeenkomstig (8.12):

$$D_b - d_b = \{2a_1 \cdot \sigma^2 / [h((\mu^2 + 2\sigma^2)^{0,5} - \mu)]\}^{0,5} \quad (8.13)$$

Resultaten met de geconstrueerde benaderingsformules

Gebruikmakend van de geconstrueerde benaderingsformules voor het onderste terugkeerpunt (8.6) t/m (8.8), voor de afstand tussen de twee terugkeerpunten (8.10), voor de minimale transactie-omvang bij een kassaldo-vermindering (8.12) en voor de minimale transactie-omvang bij een kassaldo-overmeerdering (8.13) zijn de optimale beleidsparameters benaderd en zijn de verwachte kosten per periode met deze benaderde waarden berekend. Deze resultaten mogen gegeneraliseerd worden omdat, zoals eenvoudig te verifiëren is, de benaderde beleidsparameters aan dezelfde proportionaliteitseigenschappen voldoen, als de optimale beleidsparameters. De procentuele afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode worden gegeven in tabel X.1 van bijlage X (blz. 275). Een samenvatting hiervan wordt weergegeven in tabel 8.5, door voor elke onderzochte waarde van σ en s de resultaten te vermelden (16 paren, nl. vier waarden van $a_1 = a_2$ en vier waarden van $b_1 = b_2$).

	$s = h$			$s = 3h$		
	$\sigma = 0,5\mu$	$\sigma = \mu$	$\sigma = 3\mu$	$\sigma = 0,5\mu$	$\sigma = \mu$	$\sigma = 3\mu$
< 1%	13	14	3	14	14	4
< 2%	14	16	6	15	15	7
< 3%	15		10	15	16	15
< 4%	16		12	16		16
< 5%			16			

Tabel 8.5 De "cumulatieve" procentuele afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode bij toepassing van de benaderingsformules voor $\mu > 0$

Zoals uit tabel 8.5 blijkt zijn de procentuele afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode bij toepassing van de benaderingsformules in alle 6×16 onderzochte combinaties van probleemparameters maximaal 5% en zijn de resultaten bij een kleine variatiecoëfficiënt in het algemeen beter dan bij een grote variatiecoëfficiënt (3).

Immers bij een kleine variatiecoëfficiënt is de afwijking in 55 van de 4×16 onderzochte combinaties kleiner dan 1%, terwijl dit bij een grote variatiecoëfficiënt slechts in 7 van de 32 onderzochte combinaties het geval is.

Voor het evalueren van de geconstrueerde benaderingen zijn ook de absolute afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode bekend. In tabel 8.6 vermelden wij voor verschillende waarden van de proportionele transactiekosten de maximale afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode in eenheden μh . Het maximum is hier genomen over de onderzochte waarden van de vaste transactiekosten. Zoals uit deze tabel blijkt zijn de absolute afwijkingen bij een kleine variatiecoëfficiënt duidelijk kleiner dan bij een grote.

$b_1 = b_2$	$s = h$			$s = 3h$		
	$\sigma = 0,5\mu$	$\sigma = \mu$	$\sigma = 3\mu$	$\sigma = 0,5\mu$	$\sigma = \mu$	$\sigma = 3\mu$
0	0,045	0,048	0,128	0,049	0,045	0,156
h	0,045	0,048	0,213	0,049	0,041	0,216
5h	0,045	0,048	0,425	0,049	0,041	0,334
10h	0,045	0,048	0,442	0,049	0,041	0,352

Tabel 8.6 De maximale absolute afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode in eenheden μh voor $\mu > 0$

Niet alleen zijn de absolute verschillen bij een kleine variatiecoëfficiënt duidelijk kleiner dan bij een grote, ook de belangrijkste oorzaken van de afwijkingen zijn verschillend.

Voor zowel een variatiecoëfficiënt van 0,5 als van 1 zijn de absolute afwijkingen nagenoeg onafhankelijk van de omvang van de proportionele transactiekosten en zijn ze meestal het grootst als de vaste kosten $10\mu h$ bedragen, zie bijlage X (blz. 275). Ook blijkt dat de relatieve afwijking het grootst als er geen proportionele kosten met een transactie verbonden zijn. De ontstane afwijking wordt veroorzaakt doordat bij de gebruikte benadering voor de minimale transactie-omvang voor een kas-

saldo-vermeerdering geen rekening gehouden wordt met de ligging van het onderste terugkeerpunt ten opzichte van het nulsaldo.

Bij een variatiecoëfficiënt van drie zijn zoals uit tabel 8.6 blijkt de absolute afwijkingen juist groter naarmate de proportionele transactiekosten groter zijn. Bovendien zijn de absolute afwijkingen het grootst als er geen vaste transactiekosten zijn. Dat de absolute afwijkingen groter zijn naarmate de proportionele transactiekosten groter zijn wordt veroorzaakt door twee verschillende factoren:

1. De benaderde waarde voor de afstand tussen de twee terugkeerpunten wijkt sterker af van de optimale waarde naarmate de variatiecoëfficiënt groter is [vergelijk hiervoor tabel IX.I van bijlage IX (blz. 272) met formule (8.9)].

2. Bij de benadering van het onderste terugkeerpunt wordt geen rekening gehouden met de proportionele transactiekosten, terwijl de waarde van het onderste terugkeerpunt sterker daalt naarmate de variatiecoëfficiënt hoger is [zie hiervoor de tabellen I.1 t/m I.6 van bijlage I (blz. 242 e.v.)].

Dat de grootste afwijking voor een variatiecoëfficiënt van drie gevonden worden indien er geen vaste doch wel variabele transactiekosten zijn, komt zowel doordat de daling van het onderste terugkeerpunt sterker is naarmate de vaste transactiekosten kleiner zijn als doordat de benaderde waarde voor de afstand tussen de beide terugkeerpunten meer afwijkt van de optimale naarmate de vaste transactiekosten kleiner zijn.

We kunnen de in deze paragraaf verkregen resultaten met de geconstrueerde benaderingsformules als volgt samenvatten: is de verwachte kassaldo-verandering per periode groter dan nul en zijn de transactiekosten symmetrisch dan bedraagt de maximaal gevonden procentuele afwijking van de minimaal verwachte kosten 5%. De procentuele afwijkingen zijn in het algemeen het grootst wanneer zowel de variatiecoëfficiënt groot is, de kosten van tekort gelijk zijn aan die van het in voorraad houden en bovendien er slechts proportionele kosten verbonden met een transactie.

8.3 Benaderingsformules voor een verwachte kassaldoverandering per periode kleiner dan nul

Voor het construeren van benaderingsformules voor een verwachte kassaldoverandering per periode kleiner dan nul moeten de resultaten met de optimale beleidsparameters voor dit geval bekend zijn. Deze zijn berekend voor dezelfde parametercombinaties als voor een verwachtingswaarde groter dan nul. Alleen is nu als eenheid voor de vaste transactiekosten de absolute waarde van het produkt van de voorraadkosten en de verwachte kassaldoverandering per periode gehanteerd. De resultaten voor zowel een verwachte kassaldoverandering groter dan nul als voor een verwachte kassaldoverandering kleiner dan nul staan voor proportionele transactiekosten gelijk aan h en $\sigma = 0,5 \mu$ in tabel 8.7. In deze tabel worden de resultaten weergegeven in de absolute waarde van de kassaldoverandering per periode.

$a_1 = a_2$	$\mu > 0$				$\mu < 0$			
	d	D	U	u	d	D	U	u
	$s = h$				$s = h$			
0	1,00	1,00	2,78	2,78	-2,78	-2,78	-1,00	-1,00
0,1 $ \mu h $	0,65	1,01	2,87	3,32	-3,32	-2,87	-1,01	-0,65
$ \mu h $	-0,07	1,45	3,45	4,86	-4,86	-3,45	-1,45	-0,07
10 $ \mu h $	-2,19	3,56	5,56	10,04	-10,04	-5,56	-3,56	-2,19
	$s = 3h$				$s = 3h$			
0	1,33	1,33	3,02	3,02	-1,27	-1,27	-0,66	-0,66
0,1 $ \mu h $	1,07	1,34	3,11	3,56	-1,54	-1,29	-0,67	-0,36
$ \mu h $	0,60	1,69	3,80	5,22	-2,31	-1,50	-0,87	-0,38
10 $ \mu h $	-0,31	4,30	6,28	10,81	-4,94	-2,36	-1,67	-2,93

Tabel 8.7 De waarden van de optimale beleidsparameters in eenheden $|\mu|$ voor $b_1 = b_2 = h$ en $\sigma = 0,5 \mu$

Zoals uit deze tabel blijkt zijn de optimale beleidsparameters bij symmetrische voorraadkosten ($s = h$) en een verwachte kassaldooverandering per periode groter dan nul qua structuur overeenkomstig die voor een verwachte kassaldooverandering per periode kleiner dan nul.

Is de voorraadkostenfunctie asymmetrisch dan zijn de resultaten verschillend. De waarden van de optimale beleidsparameters voor een verwachte kassaldooverandering per periode kleiner dan nul en $s = 3h$ worden vermeld in tabel I.8 t/m I.10 van bijlage I (blz. 249 en 250).

Voor het construeren van benaderingsformules voor een verwachte kassaldooverandering per periode kleiner dan nul gaan we op eenzelfde wijze te werk als in paragraaf 8.2. Nu benaderen we echter niet het onderste terugkeerpunt doch het bovenste terugkeerpunt door gebruik te maken van de optimale normvoorraad van de lineaire beslissingsregel.

Een benadering voor het bovenste terugkeerpunt

Is de verwachte kassaldooverandering per periode kleiner dan nul dan kan op eenzelfde wijze als in bijlage H.2 worden afgeleid dat de marginale verandering in de normvoorraad nadert tot $\mu \cdot h / (h+s)$ als de lengte van de beslissingsperiode toeneemt. We benaderen $\theta_{m,b}$ nu door:

$$\theta_{m,b} = \theta_1 + (m-1) \cdot \mu \cdot h / (h+s) \quad (8.14)$$

De verwachte gemiddelde voorraadkosten per periode naderen bij een toename van de lengte van de beslissingsperiode met één tot:

$$-0,5 \times \mu \cdot h \cdot s / (h+s)$$

We benaderen bij een verwachte kassaldooverandering per periode kleiner dan nul de verwachte gemiddelde kosten per periode bij een beslissingsperiode van m tijdsperioden door:

$$C_{L(\theta_{m,b})} = C_{VL(\theta_{1,b})} - \frac{(m-1) \cdot h \cdot s}{2(h+s)} \cdot \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2\mu m} \right) + \frac{a_2}{m} \quad (8.15)$$

Differentiatie van (8.15) naar m en het resultaat gelijk gesteld aan nul geeft na enige herleiding:

$$m^2 = - \frac{2a_2(h+s)}{\mu \cdot h \cdot s} - \frac{\sigma^2}{2\mu^2} \quad (8.16)$$

Omdat er in het geformuleerde liquiditeitsprobleem hoogstens eenmaal per periode een transactie plaatsvindt zijn alleen de waarden van m groter dan of gelijk aan één voor de bepaling van het bovenste terugkeerpunt van belang. Daarom stellen we:

$$m_b = m, \text{ indien } m^2 > 1 \quad (8.17)$$

$$m_b = 0, \text{ elders}$$

Gebruikmakend van (8.8) kan het bovenste terugkeerpunt nu benaderd worden:

$$U_b = \mu + 2,7 \times [s/(h+s) - 0,5] \cdot \sigma + (m_b - 1) \cdot \mu \cdot h / (h+s) \quad (8.18)$$

Een benadering voor de minimale transactie-omvang

Evenals bij een verwachte kassaldooverandering groter dan nul zijn ook bij een verwachte kassaldooverandering per periode kleiner dan nul de minimale transactie-omvang bij een kassaldovermeerdering en bij een kassaldovermindering nagenoeg onafhankelijk van de proportionele transactiekosten. Bij een verwachte kassaldooverandering per periode kleiner dan nul hebben echter de meeste onderste terugkeerpunten een waarde kleiner dan nul. Het is daarom ook niet verwonderlijk dat voor de minimale transactie-omvang bij een kassaldovermindering in de genoemde gevallen een betere benadering verkregen wordt indien men in formule (8.13) de kosten van het in voorraad houden vervangt door de kosten van tekort. In de overige gevallen wordt de minimale transactie-omvang goed benaderd door (8.13). Omdat de verwachtingswaarde nu kleiner dan nul is wordt de benadering voor de minimale transactie-omvang bij een kassaldovermindering:

$$D_b - d_b = \{2a_1 \cdot \sigma^2 / [v((\mu^2 + 2\sigma^2)^{0,5} + \mu)]\}^{0,5} \quad (8.19)$$

met

$$v = h, \text{ indien } D_b > 0$$

$$v = s, \text{ indien } D_b \leq 0$$

Omdat de bovenste controlegrenzen in de meeste gevallen positieve waarden bezitten en in de overige gevallen waarden bezitten die niet veel van nul afwijken kan de minimale transactie-omvang bij een kassaldovermeerdering het best benaderd worden door:

$$u_b - U_b = \{2a_2 \cdot \sigma^2 / [h \cdot ((\mu^2 + 2\sigma^2)^{0,5} + \mu)]\}^{0,5} \quad (8.20)$$

Een benadering voor het verschil tussen de terugkeerpunten

Bij de bepaling van een benaderingsformule voor de afstand tussen de twee terugkeerpunten indien de verwachte kassaldoverandering per periode kleiner dan nul is, moet er rekening mee gehouden worden dat het bovenste terugkeerpunt zowel een positieve als negatieve waarde kan hebben. Heeft het bovenste terugkeerpunt een negatieve waarde dan kan de afstand tussen de twee terugkeerpunten analoog aan (8.10) benaderd worden door hierin de kosten van het in voorraad houden te vervangen door de kosten van tekort:

$$U_b - D_b = -(b_1 + b_2) \cdot \mu / s, \text{ indien } U_b \leq 0 \quad (8.21)$$

Heeft het bovenste terugkeerpunt een positieve waarde en geldt bovendien:

$$U_b > -(b_1 + b_2) / \mu \cdot h \quad (8.22)$$

dan benaderen we het verschil tussen de terugkeerpunten door:

$$U_b - D_b = -(b_1 + b_2) \cdot \mu / h \quad (8.23)$$

heeft het bovenste terugkeerpunt een positieve waarde en wordt niet aan (8.22) voldaan, dan kan op eenzelfde wijze als in bijlage H.2 aangetoond worden dat voor het deterministische probleem geldt:

$$D' = \frac{(b_1 + b_2) \cdot \mu + h \cdot U'}{s}$$

Daarom benaderen we het onderste terugkeerpunt indien geldt

$$-(b_1 + b_2) / h \cdot \mu > U_b > 0$$

door

$$D_b = \frac{(b_1 + b_2) \cdot \mu + h \cdot U_b}{s} \quad (8.24)$$

Resultaten met de geconstrueerde benaderingen

Voor het bepalen van de resultaten met de geconstrueerde benaderingsformules bij een verwachte kassaldooverandering per periode kleiner dan nul zijn gebruikmakend van (8.16) t/m (8.24) de optimale beleidsparameters benaderd en zijn de verwachte kosten per periode zowel met de optimale beleidsparameters als met de benaderde waarden berekend.

De procentuele afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode worden gegeven in tabel X.2 van bijlage X (blz. 276) en een samenvatting hiervan in tabel 8.8.

	s = h			s = 3h		
	$\sigma = -0,5\mu$	$\sigma = -\mu$	$\sigma = -3\mu$	$\sigma = -0,5\mu$	$\sigma = -\mu$	$\sigma = -3\mu$
< 1%	13	14	3	14	14	5
< 2%	14	16	6	16	15	7
< 3%	15		10		16	9
< 4%	16		12			10
< 5%			16			10
< 10%						16

Tabel 8.8 De "cumulatieve" procentuele afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode bij toepassing van de alternatieve beslissingsregel voor $\mu < 0$

Evenals bij een verwachte kassaldooverandering per periode groter dan nul zijn ook de resultaten bij een verwachte kassaldooverandering per periode kleiner dan nul bij een in absolute waarde kleine variatiecoëfficiënt duidelijk beter dan bij een in absolute waarde grote variatiecoëfficiënt. Bovendien zijn nu ook de resultaten bij een grote variatiecoëfficiënt het minst als er alleen hoge proportionele transactiekosten zijn zoals blijkt uit tabel 8.9 waarin de maximale afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode die ontstaan door toepassing van de geconstrueerde benaderingen in eenheden $-\mu h$ gegeven worden voor verschillende waarden van de proportionele transactiekosten. De resultaten zijn nu bij een in absolute waarde grote variatiecoëfficiënt minder naarmate de kosten van tekort hoger zijn.

$b_1 = b_2$	$s = h$			$s = 3h$		
	$\sigma = -0,5\mu$	$\sigma = -\mu$	$\sigma = -3\mu$	$\sigma = -0,5\mu$	$\sigma = -\mu$	$\sigma = -3\mu$
0	0,045	0,048	0,128	0,022	0,031	0,023
h	0,045	0,048	0,213	0,022	0,030	0,183
5h	0,045	0,048	0,425	0,022	0,030	1,073
10h	0,045	0,048	0,442	0,022	0,030	1,415

Tabel 8.9 De maximale absolute afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode in eenheden $-\mu h$ voor $\mu < 0$

Dat de resultaten bij een verwachte kassaldooverandering kleiner dan nul bij een in absolute waarde grote variatiecoëfficiënt slechter zijn dan bij een in absolute waarde kleine variatiecoëfficiënt wordt veroorzaakt door dezelfde factoren als bij een verwachte kassaldooverandering per periode groter dan nul. Dat de resultaten nu juist bij relatief hoge kosten van tekort het minst zijn komt doordat de factoren die ter verklaring van de mindere resultaten genoemd zijn, nu in versterkte mate gelden. Immers:

1. Bij relatief hoge kosten van tekort en een verwachte kassaldooverandering per periode kleiner dan nul is de verandering in het relevante terugkeerpunt sterker dan wanneer de voorraadkosten gelijk zijn aan de kosten van tekort. Bij een verwachte kassaldooverandering per periode groter dan nul wordt de genoemde verandering juist minder sterk als de kosten van tekort relatief groter worden.
2. Doordat de benaderde waarde van het bovenste terugkeerpunt te laag is bij proportionele transactiekosten ontstaat een extra afwijking die niet optreedt bij de bepaling van de afstand tussen de terugkeerpunten bij een verwachte kassaldooverandering groter dan nul omdat dan het relevante terugkeerpunt altijd een waarde groter dan nul heeft.

We kunnen de in deze paragraaf verkregen resultaten met de geconstrueerde benaderingen voor de optimale beleidsparameters als volgt samenvatten: Is de verwachte saldooverandering per periode kleiner dan nul en zijn de transactiekosten symmetrisch dan bedraagt de maximaal gevonden procentu-

ele afwijking 9,7%. De procentuele afwijkingen zijn in het algemeen het grootst als de absolute waarde van de variatiecoëfficiënt hoog is, er alleen proportionele kosten met een transactie verbonden zijn en de kosten van tekort groter zijn dan die van het in voorraad houden. Zie bijlage X (blz. 275).

8.4 De invloed van asymmetrische transactiekosten

Tot nu toe zijn bij de berekeningen zowel de vaste als de proportionele kosten verbonden met een kassaldoovermeerdering steeds gelijk gesteld aan die verbonden met een kassaldovermindering. In deze paragraaf zullen we daarom ook de invloed van een asymmetrische transactiekostenfunctie op de waarden van de optimale beleidsparameters en de bruikbaarheid van de geconstrueerde beslissingsregel onderzoeken.

We beperken in eerste instantie het onderzoek tot een verwachte kassaldooverandering per periode groter dan nul en waarden van de standaardafwijking van μ en 3μ . Zowel de invloed van asymmetrische vaste transactiekosten als van asymmetrische proportionele transactiekosten onderzoeken we afzonderlijk.

Asymmetrische vaste transactiekosten

Voor de bepaling van de invloed op de optimale beleidsparameters van het asymmetrisch zijn van de vaste transactiekosten, zijn de optimale beleidsparameters berekend voor symmetrische proportionele transactiekosten gelijk aan nul en $5h$ en vaste transactiekosten in een richting gelijk aan nul. De waarden van de gevonden onderste terugkeerpunten voor $s = h$ en $\sigma = \mu$ worden gegeven in tabel 8.10.

a	b = 0			b = 5h		
	$a_1 = a$	$a_1 = a$	$a_1 = 0$	$a_1 = a$	$a_1 = a$	$a_1 = 0$
	$a_2 = a$	$a_2 = 0$	$a_2 = a$	$a_2 = a$	$a_2 = 0$	$a_2 = a$
0	1,00	1,00	1,00	0,89	0,89	0,89
0,1 μ h	1,02	1,00	0,98	0,93	0,93	0,89
μ h	1,34	1,47	0,92	1,39	1,38	0,89
10 μ h	3,31	3,43	0,89	3,43	3,34	0,89

Tabel 8.10 De waarden van het onderste terugkeerpunt voor $s = h$, $\sigma = \mu$ en $\mu > 0$

Hieruit volgt dat de vaste transactiekosten verbonden met een kassaldo-vermindering (a_2) nauwelijks invloed hebben op de waarde van het onderste terugkeerpunt. Immers voor $a_1 = 0$ en $a_2 = a$ wijkt de waarde van het optimale onderste terugkeerpunt (zie tabel X.3 blz. 277) niet veel af van dat gevonden voor $a_1 = a_2 = 0$ en voor $a_1 = a$ en $a_2 = 0$ (zie tabel X.4 blz. 277) worden ongeveer dezelfde waarden gevonden als voor $a_1 = a_2 = a$. Soortgelijke resultaten gelden ook voor $s = 3h$.

Dat de vaste transactiekosten verbonden met een kassaldoovermindering bij een verwachte kassaldooverandering per periode groter dan nul niet veel invloed hebben op de waarde van het onderste terugkeerpunt bij een kleine variatiecoëfficiënt is ook af te leiden uit de in tabel VI.1 t/m VI.4 (blz. 253 e.v.) gegeven kansen op een kassaldoovermindering door een transactie aan het begin van een periode bij een optimaal beleid.

Is de variatiecoëfficiënt echter gelijk aan 3 dan geldt bovenstaande conclusie ook voor $b_1 = b_2 = 5h$, doch niet voor $b_1 = b_2 = 0$ zoals uit tabel 8.11 blijkt waarin de waarden van de onderste terugkeerpunten vermeld worden voor $s = h$ en $\sigma = 3\mu$.

a	b = 0			b = 5h		
	$a_1 = a$	$a_1 = a$	$a_1 = 0$	$a_1 = a$	$a_1 = a$	$a_1 = 0$
	$a_2 = a$	$a_2 = 0$	$a_2 = a$	$a_2 = a$	$a_2 = 0$	$a_2 = a$
0	1,00	1,00	1,00	-1,07	-1,07	-1,07
0,1 μ h	1,01	1,05	0,96	-1,02	-1,01	-1,07
μ h	1,15	1,47	0,68	-0,62	-0,61	-1,08
10 μ h	2,30	3,49	-0,16	1,32	1,36	-1,11

Tabel 8.11 De waarden van het onderste terugkeerpunt voor $s = h$, $\sigma = 3\mu$ en $\mu > 0$

Soortgelijke resultaten gelden ook voor $s = 3h$. Dat de invloed van de vaste transactiekosten verbonden met een kassalddovermindering duidelijk aanwezig is indien er geen proportionele transactiekosten zijn en slechts in beperkte mate bij hoge proportionele transactiekosten volgt ook uit de tabellen IV.5 en IV.6 van bijlage IV (blz. 257 en 258), waarin de kansen op een transactie aan het begin van een periode bij een optimaal beleid gegeven worden voor een variatiecoëfficiënt van drie.

Uit de voorafgaande analyse is gebleken dat de vaste transactiekosten verbonden met een kassalddovermindering alleen dan een duidelijke invloed hebben op de waarde van het onderste terugkeerpunt indien er geen proportionele transactiekosten zijn en de variatiecoëfficiënt relatief groot is. Dit wordt veroorzaakt doordat alleen bij de genoemde combinaties van de probleemparameters de kans op een kassalddovermindering door een transactie een niet te verwaarlozen waarde heeft. Daarom gaan wij er bij de benadering van het onderste terugkeerpunt in het vervolg van uit dat de gemiddelde verwachte transactiekosten per tijdsperiode a_2/m bedragen. Uit (8.6) volgt voor de optimale lengte van de beslissingsperiode:

$$m^2 = \frac{2a_2(h+s)}{\mu \cdot h \cdot s} - \frac{\sigma^2}{2\mu^2} \quad (8.25)$$

We zullen daarom in het vervolg (8.25), (8.7) en (8.8) gebruiken voor de benadering van het onderste terugkeerpunt indien de verwachte kassaldo-verandering per periode groter dan nul is.

Uit de resultaten van de reeds genoemde berekeningen bij asymmetrische vaste transactiekosten blijkt dat zowel de minimale transactie-omvang bij een kassaldovermindering als bij een kassaldovermeerdering nauwelijks afwijken van die, die gevonden worden bij symmetrische vaste transactiekosten. Hetzelfde geldt voor de afstand tussen de twee terugkeerpunten.

Gebruikmakend van de geconstrueerde benaderingen [(8.2), (8.8), (8.10), (8.12), (8.13) en (8.25)] zijn de optimale beleidsparameters voor de reeds genoemde combinaties van probleemparameters benaderd en de verwachte kosten per periode berekend. De procentuele afwijkingen van de minimaal verwachte kosten die ontstaan door toepassing van de benaderde beleidsparameters zijn te vinden in tabel X.3 van bijlage X (blz. 277). Uit een vergelijking tussen deze resultaten en de reeds besproken resultaten uit tabel X.1 met symmetrische vaste transactiekosten, blijkt dat er een grote mate van overeenstemming bestaat.

Voor een variatiecoëfficiënt gelijk aan een bedraagt de maximale relatieve afwijking van de minimaal verwachte kosten 1,3% en de maximale absolute afwijking 0,045 μ h.

Voor een variatiecoëfficiënt gelijk aan drie treden de grootste verschillen in procentuele afwijkingen op, indien de kosten van tekort gelijk zijn aan de kosten van het in voorraad houden. Deze procentuele afwijkingen worden gegeven in tabel 8.12.

Hieruit volgt dat het geen rekening houden bij de bepaling van het onderste terugkeerpunt met de invloed van de vaste transactiekosten verbonden met een kassaldovermindering weliswaar een grotere relatieve afwijking van de minimaal verwachte kosten bij een grote variatiecoëfficiënt tot gevolg heeft maar dat de maximale relatieve afwijking niet veel meer dan 5% zal bedragen.

Ook is er slechts een geringe stijging in de maximale absolute afwijking vergeleken met de resultaten bij symmetrische transactiekosten en wel van 0,425 μ h naar 0,433 μ h.

a	b = 0			b = 5h		
	$a_1 = a$	$a_1 = a$	$a_1 = 0$	$a_1 = a$	$a_1 = a$	$a_1 = 0$
	$a_2 = a$	$a_2 = 0$	$a_2 = a$	$a_2 = a$	$a_2 = 0$	$a_2 = a$
0,1 μ h	0,0	0,0	0,0	4,8	4,6	4,8
μ h	0,0	0,7	0,3	2,2	2,3	4,7
10 μ h	2,6	0,1	5,4	2,6	2,5	4,7

Tabel 8.12 De procentuele afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode bij toepassing van de alternatieve beslissingsregel voor $s = h$, $\sigma = 3\mu$ en $\mu > 0$

Is de verwachte kassaldooverandering per periode kleiner dan nul en zijn de kosten van tekort gelijk aan die van het in voorraad houden, dan geeft de alternatieve beslissingsregel dezelfde resultaten als bij een verwachte kassaldooverandering per periode groter dan nul. Uit tabel 8.9 van paragraaf 8.3 is gebleken dat indien er geen proportionele transactiekosten zijn, de maximale afwijkingen van de minimaal verwachte kosten bij $s = 3h$ duidelijk kleiner zijn dan bij $s = h$. Bovendien treden bij een verwachte kassaldooverandering per periode kleiner dan nul ook de grootste afwijkingen op als er geen vaste doch wel hoge proportionele transactiekosten zijn. Daarom hebben we de invloed van het asymmetrisch zijn van de vaste transactiekosten op de optimale beleidsparameters niet nader onderzocht en handhaven we (8.16).

Asymmetrische proportionele transactiekosten

Voor het bepalen van de invloed van asymmetrische proportionele transactiekosten op de optimale beleidsparameters beperken we de berekening tot de parametercombinaties zonder vaste transactiekosten omdat, zoals in paragraaf 8.2 gebleken is, de invloed van de proportionele transactiekosten op de waarde van het onderste terugkeerpunt het grootst is indien er geen vaste kosten met een transactie verbonden zijn. De invloed is onderzocht door de proportionele transactiekosten in een richting gelijk

aan nul te stellen. In tabel 8.13 geven we voor $s = h$ de optimale terugkeerpunten zowel voor proportionele transactiekosten in beide richtingen als voor alleen proportionele transactiekosten verbonden met een kassaldo-vermeerdering. Voor alleen proportionele transactiekosten verbonden met een kassaldo-vermindering en voor $s = 3h$ gelden overeenkomstige resultaten.

b	$\sigma = \mu$		$\sigma = 3\mu$	
	$b_1 = b$ $b_2 = b$	$b_1 = b$ $b_2 = 0$	$b_1 = b$ $b_2 = b$	$b_1 = b$ $b_2 = 0$
0	1,00	1,00	1,00	1,00
h	0,90	0,91	-0,27	0,14
5h	0,89	0,89	-1,07	-0,80
10h	0,89	0,89	-1,17	-1,07

Tabel 8.13 De waarden van het onderste terugkeerpunt bij alleen proportionele transactiekosten voor $s = h$ en $\mu > 0$

Uit de tabel 8.13 blijkt dat de invloed van het asymmetrisch zijn van de proportionele transactiekosten op de waarde van het onderste terugkeerpunt vrij gering is. Alleen bij een hoge variatiecoëfficiënt daalt het onderste terugkeerpunt iets minder snel als er slechts variabele transactiekosten verbonden zijn met een kassaldo-vermeerdering.

Voorts bleek uit de berekeningen dat de afstand tussen de terugkeerpunten bij niet symmetrische proportionele transactiekosten ongeveer gelijk is aan de afstand tussen de terugkeerpunten bij symmetrische proportionele transactiekosten verminderd met het produkt van de proportionele kosten en μ/h . Bijvoorbeeld voor $b_1 = b_2 = 5h$, $s = h$, $\sigma = \mu$ en $\sigma = 3\mu$ geldt zoals uit tabel 8.2 blijkt voor U-D respectievelijk $10,07\mu$ en $13,78\mu$. Voor $b_1 = 5h$ en $b_2 = 0$ worden deze waarden $5,06\mu$ en $8,31\mu$.

Op grond van deze resultaten zijn de reeds gegeven benaderingen voor de bepaling van de beleidsparameters niet gewijzigd en zijn afwijkingen van de minimaal verwachte kosten berekend bij asymmetrische proportionele

transactiekosten. De resultaten worden vermeld in tabel X.4 van bijlage X (blz. 277). Uit de resultaten volgt:

1. Dat de verwachte kosten per periode bij toepassing van de geconstrueerde beleidsparameters bij een variatiecoëfficiënt van één niet afwijken van de minimaal verwachte kosten indien de proportionele transactiekosten niet symmetrisch zijn.
2. Bij een variatiecoëfficiënt van drie en asymmetrische proportionele transactiekosten zijn de afwijkingen van de minimaal verwachte kosten in absolute waarde iets lager dan bij symmetrische variabele transactiekosten. Omdat echter de totale verwachte kosten per periode bij alleen proportionele transactiekosten verbonden met een kassaldovermindering duidelijk lager zijn dan bij symmetrische proportionele transactiekosten zijn de relatieve afwijkingen bij alleen proportionele transactiekosten verbonden met een kassaldovermindering duidelijk hoger.

In deze paragraaf zijn de optimale beleidsparameters bepaald voor een asymmetrische transactiekostenfunctie en op grond van de verkregen resultaten zijn de benaderingsformules zodanig gewijzigd dat ze zowel gebruikt kunnen worden voor symmetrische als voor asymmetrische transactiekostenfuncties. De met de geconstrueerde benaderingsformules verkregen resultaten kunnen voor een verwachte kassaldoverandering per periode groter dan nul als volgt worden samengevat:

1. De afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode zijn voor asymmetrische vaste transactiekosten bijna gelijk aan die verkregen bij symmetrische vaste transactiekosten.
2. Zijn de proportionele transactiekosten niet symmetrisch dan zijn de absolute afwijkingen ongeveer gelijk aan die verkregen met symmetrische proportionele transactiekosten. Alleen indien de variatiecoëfficiënt groot is en de proportionele transactiekosten verbonden met een kassaldovermindering groter zijn dan die verbonden met een kassaldovermeerdering, dan zijn de procentuele afwijkingen groter bij niet symmetrische proportionele transactiekosten.

8.5 Evaluatie van de geconstrueerde benaderingen

In de drie voorafgaande paragrafen zijn een aantal benaderingen voor de optimale beleidsparameters van het liquiditeitsprobleem geconstrueerd en is de bruikbaarheid hiervan onderzocht door voor een aantal combinaties van probleemparameters zowel de relatieve als de absolute afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode die hierdoor ontstaan te bepalen. Voor het evalueren van de geconstrueerde benaderingsformules onderzoeken we nog die combinaties van probleemparameters waarvoor op grond van de reeds verkregen resultaten te verwachten is dat daarbij de grootste afwijkingen op zullen treden. Bovendien zullen we in deze paragraaf nog onderzoeken wat de invloed op de resultaten is van de gekozen benadering voor de afstand tussen de twee terugkeerpunten en tenslotte onderzoeken we de geconstrueerde benaderingsformules nog voor een absolute waarde van de variatiecoëfficiënt van twee.

Bepaling van de maximale afwijkingen

Voor het bepalen van die combinaties van probleemparameters waarvoor te verwachten is dat de grootste afwijkingen op zullen treden resumeren we eerst de reeds verkregen resultaten.

1. Is de verwachte kassaldooverandering per periode groter dan nul en zijn de transactiekosten symmetrisch dan bedraagt de maximaal gevonden procentuele afwijking 5%. De resultaten zijn in het algemeen het minst goed als de variatiecoëfficiënt relatief groot is, de proportionele transactiekosten relatief hoog zijn en de kosten van tekort gelijk zijn aan de kosten van het in voorraad houden (zie de tabellen 8.5 en 8.6).
2. Is de verwachte kassaldooverandering per periode kleiner dan nul en zijn de transactiekosten symmetrisch dan bedraagt de maximaal gevonden procentuele afwijking 9,7%. De resultaten zijn in het algemeen het minst als de variatiecoëfficiënt relatief groot is, de proportionele transactiekosten relatief groot zijn, de kosten van tekort duidelijk groter zijn dan die van het in voorraad houden (zie de tabellen 8.8 en 8.9).
3. Is de verwachte kassaldooverandering per periode groter dan nul en zijn de vaste transactiekosten asymmetrisch dan zijn de resultaten bijna

gelijk aan die, die verkregen worden met symmetrische vaste transactiekosten (zie tabel 8.12).

4. Is de verwachte kassaldooverandering per periode groter dan nul en zijn de proportionele transactiekosten asymmetrisch dan zijn de resultaten ten opzichte van die verkregen met symmetrische proportionele transactiekosten in het algemeen beter als de proportionele transactiekosten verbonden met een kassaldovermeerdering groter zijn dan die verbonden met een kassaldovermindering, doch voor een grote variatiecoëfficiënt slechter als het tegenovergestelde het geval is (zie tabel X.4).

Op grond van de verkregen resultaten is het voor de hand liggend om de volgende combinaties van probleemparameters nader te onderzoeken waarvoor geldt:

- a) Vaste transactiekosten gelijk aan nul.
- b) Een absolute waarde van de variatiecoëfficiënt gelijk aan drie.
- c) Of een verwachte kassaldooverandering per periode groter dan nul en kosten van tekort gelijk aan die van het in voorraad houden, of een verwachte kassaldooverandering per periode kleiner dan nul en de kosten van tekort gelijk aan driemaal die van het in voorraad houden.

Een verklaring voor het feit dat te verwachten is dat juist bij de genoemde combinaties de grootste afwijkingen zullen optreden is reeds gegeven in de voorafgaande paragrafen.

De resultaten van de genoemde combinaties van probleemparameters voor verschillende waarden van de proportionele transactiekosten worden gegeven in tabel 8.14.

Uit deze tabel blijkt dat bij een verwachte kassaldooverandering per periode groter dan nul de grootste procentuele afwijking optreedt bij symmetrische proportionele transactiekosten indien deze gelijk zijn aan ongeveer driemaal de kosten van het in voorraad houden, en dat de grootste afwijking bij asymmetrische proportionele transactiekosten optreedt indien er geen proportionele transactiekosten met een kassaldovermeerdering verbonden zijn en de proportionele transactiekosten verbonden met een kassaldovermindering gelijk zijn aan ongeveer zevenmaal de kosten van het in voorraad houden.

b	$\mu > 0, s = h$			$\mu < 0, s = 3h$		
	$b_1 = b$	$b_1 = b$	$b_1 = 0$	$b_1 = b$	$b_1 = b$	$b_1 = 0$
	$b_2 = b$	$b_2 = 0$	$b_2 = b$	$b_2 = b$	$b_2 = 0$	$b_2 = b$
h	4,8	2,6	3,5	3,2	1,4	1,1
3h	5,8	4,6	8,7	9,3	7,2	4,9
5h	4,9	4,2	10,2	9,7	11,0	5,7
7h	4,0	4,8	10,9	9,2	14,7	6,6
10h	3,2	3,1	10,2	8,5	17,8	6,7

Tabel 8.14 De procentuele afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode bij toepassing van de benaderingsformules voor ongunstige combinaties van kostenparameters en een standaardafwijking van driemaal de absolute waarde van de verwachtingswaarde

Uit tabel 8.14 blijkt ook dat bij een verwachte kassaldooverandering per periode kleiner dan nul en symmetrische transactiekosten de grootste relatieve afwijking ligt bij proportionele transactiekosten van vijfmaal de kosten het in voorraad houden. Evenals bij een verwachte kassaldooverandering groter dan nul zijn de afwijkingen relatief groot als er alleen proportionele transactiekosten verbonden zijn met een transactie die tegenovergesteld is aan de richting waarin het saldo zich beweegt ten gevolge van de niet beïnvloedbare kassaldooverandering omdat dan de absolute afwijking gerelateerd wordt aan lage verwachte kosten per periode.

De invloed van de benadering van de afstand tussen de twee terugkeerpunten op de verkregen resultaten

De in tabel 8.14 vermelde afwijkingen worden veroorzaakt door twee factoren:

1. Bij de benadering van de terugkeerpunten wordt geen rekening gehouden met de invloed van de proportionele transactiekosten.
2. Vooral bij een hoge variatiecoëfficiënt en alleen maar proportionele transactiekosten in één richting is de benadering voor de afstand tussen

de twee terugkeerpunten niet al te goed.

Voor het construeren van een eenvoudig berekenbare benaderingsformule voor het relevante terugkeerpunt waarin ook rekening wordt gehouden met de invloed van proportionele transactiekosten bij een hoge variatiecoëfficiënt zien we op dit moment geen mogelijkheden.

Wel voor het construeren van een benaderingsformule voor de afstand tussen de twee terugkeerpunten waarin rekening wordt gehouden met de variatiecoëfficiënt. Zoals uit tabel IX.1 van bijlage IX (blz. 272) duidelijk blijkt, zal bij het corrigeren van de reeds geconstrueerde benaderingsformules een onderscheid gemaakt moeten worden tussen een kleine en een grote variatiecoëfficiënt, hetgeen de eenvoud van de benaderingsformules niet ten goede komt. Daarom is eerst de invloed van de reeds gebruikte benadering op de resultaten nader onderzocht.

Om te onderzoeken in hoeverre de gevonden afwijkingen veroorzaakt worden door de gebruikte benadering voor de afstand tussen de twee terugkeerpunten, hebben we de verwachte kosten bepaald uitgaande van het relevante optimale terugkeerpunt en het andere terugkeerpunt bepaald door gebruik te maken van (8.10) respectievelijk (8.21), (8.23) en (8.24). De resultaten worden vermeld in tabel 8.15.

b	$\mu > 0, s = h$			$\mu < 0, s = 3h$		
	$b_1 = b$	$b_1 = b$	$b_1 = 0$	$b_1 = b$	$b_1 = b$	$b_1 = 0$
	$b_2 = b$	$b_2 = 0$	$b_2 = b$	$b_2 = b$	$b_2 = 0$	$b_2 = b$
h	4,0	3,6	4,8	0,9	0,6	0,5
3h	2,3	3,4	6,6	2,2	2,9	1,8
5h	0,7	2,3	5,5	2,1	4,1	2,1
7h	0,2	1,2	3,4	1,0	2,7	1,3
10h	0,1	0,5	1,7	0,5	3,8	1,4

Tabel 8.15 De procentuele afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode bij toepassing van (8.10) en (8.21), (8.23) en (8.24) uitgaande van het relevante optimale terugkeerpunt en $\sigma = 3\mu$

Vergelijken we de resultaten uit tabel 8.14 met die van tabel 8.15 dan blijkt dat in het algemeen de resultaten in de laatstgenoemde tabel duidelijk beter zijn dan in de eerstgenoemde. Dit is een duidelijke indicatie dat zowel de grootste absolute als relatieve afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode veroorzaakt worden door het niet rekening houden met de vaste transactiekosten bij de bepaling van het relevante terugkeerpunt.

Ook mogen we concluderen dat de gebruikte benaderingen voor de afstand tussen de terugkeerpunten slechts tot geringe absolute afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode leiden.

Maximale afwijkingen bij een absolute waarde van de variatiecoëfficiënt van twee

Uit het voorafgaande is gebleken dat de geconstrueerde benaderingsformules goede resultaten geven bij een absolute waarde van de variatiecoëfficiënt gelijk aan één maar dat relatief grote afwijkingen kunnen ontstaan bij ongunstige combinaties van probleemparameters indien de absolute waarde van de variatiecoëfficiënt gelijk aan drie is. Het ligt dus voor de hand om ook de bruikbaarheid van de alternatieve beslissingsregel te bepalen bij een variatiecoëfficiënt die een absolute waarde van twee heeft. Immers door een variatiecoëfficiënt met een absolute waarde van twee wordt een stochastische kasstroom met een vrij grote spreiding beschreven en zal zowel de maximale relatieve als absolute afwijking bij gebruik van de benaderingsformules duidelijk minder zijn dan bij een variatiecoëfficiënt met een absolute waarde van drie omdat zowel de gebruikte benadering voor de afstand tussen de terugkeerpunten als de gebruikte benadering voor het relevante terugkeerpunt dan beter zijn. De procentuele afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode voor de steeds gebruikte combinaties van kostenparameters worden gegeven in tabel X.5 van bijlage X (blz. 278). Die voor de ongunstige combinaties van probleemparameters in tabel 8.16.

b	$\mu > 0, s = h$			$\mu < 0, s = 3h$		
	$b_1 = b$	$b_1 = b$	$b_1 = 0$	$b_1 = b$	$b_1 = b$	$b_1 = 0$
	$b_2 = b$	$b_2 = 0$	$b_2 = b$	$b_2 = b$	$b_2 = 0$	$b_2 = b$
h	2,4	1,3	2,0	1,7	0,8	0,6
3h	2,0	1,6	4,1	2,7	3,1	1,6
5h	1,5	1,4	4,7	3,1	5,2	2,0
7h	1,1	1,1	5,0	2,5	7,0	2,3
10h	0,9	0,9	5,1	2,0	7,5	1,9

Tabel 8.16 De procentuele afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode voor ongunstige combinaties van de probleemparemeters bij een variatiecoëfficiënt met een absolute waarde van twee

Uit de twee genoemde tabellen en de twee voorafgaande berekeningen kunnen we de volgende conclusies trekken met betrekking tot de afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode die kunnen ontstaan bij toepassing van de benaderingsformules indien de absolute waarde van de variatiecoëfficiënt gelijk is aan twee:

1. Zijn de transactiekosten symmetrisch dan bedragen de maximale procentuele en absolute afwijkingen bij een verwachte kassaldooverandering per periode groter dan nul respectievelijk 2,4% en $0,15\mu$ en bij een verwachte kassaldooverandering per periode kleiner dan nul respectievelijk 3,1% en $0,275\mu$.
2. Zijn de transactiekosten asymmetrisch dan bedragen de maximale procentuele en absolute afwijkingen respectievelijk 5,1% en $0,104\mu h$ bij een verwachte kassaldooverandering groter dan nul en 7,5% en $0,257\mu h$ bij een verwachte kassaldooverandering kleiner dan nul.

8.6 Samenvatting en conclusies

In dit hoofdstuk zijn eenvoudig te berekenen benaderingsformules geconstrueerd voor het stochastische liquiditeitsprobleem en zijn de resultaten geëvalueerd door het bepalen van zowel de procentuele als de absolu-

te afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode.

Bij de formulering is een onderscheid gemaakt tussen een verwachte kassaldo-verandering per periode groter dan nul en een verwachte kassaldo-verandering per periode kleiner dan nul.

Een verschil tussen de benaderingsformules voor een positieve en een negatieve verwachtingswaarde is dat de minimale transactie-omvang bij een kassaldo-vermeerdering afhankelijk is van de waarde van het onderste terugkeerpunt. Dit maakt de beslissingsregel bij een negatieve verwachtingswaarde complexer dan bij een positieve verwachtingswaarde.

Toepassing van de ook bij een positieve verwachtingswaarde gebruikte formule (8.12) ter bepaling van de minimale transactie-omvang bij negatieve verwachtingswaarde heeft voor een kleine variatiecoëfficiënt nauwelijks invloed op de relatieve afwijking van de minimaal verwachte kosten per periode.

Alleen bij $\sigma = 3\mu$, $a_1 = a_2 = 10\mu h$, $s = 3h$ en $b_1 = b_2 = 0$ stijgt de relatieve afwijking van 0,4% naar 3,2%. In alle andere gevallen is de verandering bij $\sigma = 3\mu$ duidelijk minder.

Bij de benadering van de afstand tussen de terugkeerpunten bij een verwachte kassaldo-verandering kleiner dan nul is rekening gehouden met de mogelijkheid dat het bovenste terugkeerpunt een positieve waarde kan aannemen.

Bij een absolute waarde van de variatiecoëfficiënt ≤ 2 bedraagt deze echter maximaal 0,33%. Daarom kunnen we bij het formuleren van de algemene benaderingsformules deze mogelijkheid verwaarlozen. Op grond van de verkregen resultaten stellen we daarom voor, indien de verwachte kassaldo-verandering per periode ongelijk aan nul is en de absolute waarde van de variatiecoëfficiënt kleiner dan of gelijk aan twee is, de beleidsparameters van het liquiditeitsprobleem te benaderen zoals wordt weergegeven in tabel 8.17.

$\mu > 0$	$\mu < 0$
$D_b = \mu + \frac{(m_b - 1) \cdot s \cdot \mu}{(h+s)} + C_1$	$U_b = \mu + \frac{(m_b - 1) \cdot h \cdot \mu}{(h+s)} + C_1$
$U_b = D_b + \frac{(b_1 + b_2) \cdot \mu}{h}$	$D_b = U_b + \frac{(b_1 + b_2) \cdot \mu}{s}$
$d_b = D_b - C_2$	$d_b = D_b - C_2$
$u_b = U_b + C_3$	$u_b = U_b + C_3$
$m^2 = \frac{2a_1 \cdot (h+s)}{\mu \cdot h \cdot s} - \frac{\sigma^2}{2\mu^2}$	$C_1 = 2,7 \times [s/(h+s) - 0,5] \cdot \sigma$
$m_b = m \text{ indien } m^2 > 1$	$C_2 = \{2a_1 \sigma^2 / [h(\mu^2 + 2\sigma^2)^{0,5} - \mu]\}^{0,5}$
$= 1 \text{ elders}$	$C_3 = \{2a_2 \sigma^2 / [h(\mu^2 + 2\sigma^2)^{0,5} - \mu]\}^{0,5}$

Tabel 8.17 Benaderingsformules voor de beleidsparameters indien $\mu \neq 0$ en $\sigma \leq 2\mu$

De in dit hoofdstuk verkregen resultaten kunnen we als volgt samenvatten:

1. Door gebruik te maken van het verband tussen de optimale normvoorraad bij een gegeven lengte van de beslissingsperiode met respectievelijk de lengte en de verwachte kosten per tijdsperiode is het mogelijk redelijke benaderingen te construeren voor het bovenste terugkeerpunt bij een verwachte kassaldooverandering groter dan nul en voor het bovenste terugkeerpunt bij een verwachte kassaldooverandering kleiner dan nul.

2. De geconstrueerde benaderingen voor de minimale transactie-omvang en de afstand tussen de beide terugkeerpunten hebben in het algemeen slechts geringe afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode tot gevolg.

3. Worden de beleidsparameters met de in deze paragraaf gegeven benaderingsformules berekend dan heeft dit in het algemeen slechts een geringe afwijking van de minimaal verwachte kosten per periode tot gevolg.

De maximale procentuele en absolute afwijkingen, zoals gevonden in de voorafgaande paragrafen, worden gegeven in tabel 8.18. Hieruit volgt:

σ	symmetrische transactiekosten				asymmetrische transactiekosten			
	$\mu > 0$		$\mu < 0$		$\mu > 0$		$\mu < 0$	
	rel	abs	rel	abs	rel	abs	rel	abs
0,5 μ	3,5%	0,05 μh	3,5%	0,05 μh				
μ	2,3%	0,05 μh	3,1%	0,05 μh	1,9%	0,05 μh		
2 μ	2,4%	0,15 μh	3,1%	0,28 μh	5,1%	0,10 μh	7,5%	0,26 μh
3 μ	5,0%	0,44 μh	9,7%	1,42 μh	10,9%	0,49 μh	17,8%	1,07 μh

Tabel 8.18 De maximale procentuele en absolute afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode bij toepassing van de geconstrueerde benaderingen

3a. Bij een variatiecoëfficiënt met een absolute waarde kleiner dan of gelijk aan 1 leidt toepassing van de geconstrueerde benaderingen in het algemeen slechts tot geringe afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode. De maximaal gevonden relatieve afwijking is minder dan 4% terwijl de maximaal gevonden absolute afwijking minder dan 0,05 μh bedraagt.

3b. Bij een variatiecoëfficiënt met een absolute waarde van twee is de maximale afwijking van de minimaal verwachte kosten per periode bij toepassing van de benaderingsformules eveneens minder dan 4%, indien de transactiekosten symmetrisch zijn. De absolute waarde van de afwijkingen is nu echter duidelijk groter dan bij een variatiecoëfficiënt met een absolute waarde van een. Zijn de transactiekosten niet symmetrisch, dan is de maximale absolute afwijking niet groter dan bij symmetrische transactiekosten. De relatieve afwijking is duidelijk groter als er alleen proportionele transactiekosten zijn in de richting die tegenoverge-

steld is aan die waarin het kassaldo zich beweegt ten gevolge van de kassaldooveranderingen.

3c. Bij een variatiecoëfficiënt met een absolute waarde van drie zijn zowel de procentuele als de absolute afwijkingen duidelijk groter dan bij een variatiecoëfficiënt met een absolute waarde van twee. Bij symmetrische transactiekosten is de maximale procentuele afwijking echter minder dan 10%.

SAMENVATTING EN CONCLUSIES

Voor de ondersteuning van de beleidsbepaling bij de liquiditeitsplanning zijn zowel in de financiële als in de besliskundige literatuur modellen beschikbaar. De belangrijkste modellen hebben wij beknopt besproken in hoofdstuk een. Bij deze bespreking is het accent gelegd op de wijze waarop de relevante grootheden in het algemeen gemodelleerd zijn en de voor deze modellering beschikbare oplossingsmethoden.

Ook zijn in het eerste hoofdstuk de beschikbare modellen voor het liquiditeitsprobleem verdeeld in tactische en strategische modellen. Bij de tactische modellen ligt het accent op het zo goed mogelijk gebruik maken van de beschikbare alternatieven om middelen tijdelijk te bestemmen of aan te trekken en is de aan te houden kasvoorraad het resultaat. Bij de strategische modellen voor het liquiditeitsprobleem ligt het accent op het formuleren van algemene richtlijnen, die gebruikt kunnen worden om de voor de afwikkeling van het betalingsverkeer benodigde financiële middelen, tegen zo laag mogelijke kosten beschikbaar te krijgen.

Beide modelcategorieën hebben hun eigen voor- en nadelen. Alleen de beslisser kan uitmaken welke categorie in zijn beslissingssituatie de beste mogelijkheden geeft om de hem ter beschikking staande informatie te verwerken. Wij hebben bij de nadere specificatie van onze probleemstelling gekozen voor het strategisch element, met name voor problemen waarbij de kansverdelingen van de kassaldoveranderingen in toekomstige perioden aan de beslisser bekend zijn.

Bij de formulering van strategische modellen voor het liquiditeitsprobleem wordt in de literatuur meestal verondersteld, dat de beslisser de beschikking heeft over de homogene activa kasgeld en korte-termijn beleggingen en dat hij kan beschikken over een kredietfaciliteit. Bovendien dat er zowel vaste als proportionele kosten aan de aan- en verkoop van korte-termijn beleggingen verbonden zijn en dat de kassaldoveranderingen per periode onafhankelijk verdeeld zijn.

Bij het strategisch liquiditeitsprobleem beschikt de beslisser aan het begin van iedere periode over de drie volgende mogelijkheden:

- a) het kassaldo vermeerderen door verkoop van korte termijn beleggingen;
- b) het kassaldo verminderen door aankoop van korte termijn beleggingen;
- c) het kassaldo ongewijzigd laten.

Bij de eerste twee mogelijkheden wordt er een transactie tussen kas en korte termijn beleggingen uitgevoerd. Bij een optimaal beleid wordt er alleen dan een transactie uitgevoerd als de transactiekosten kleiner zijn dan de bereikte reductie in de verwachte voorraadkosten. De waarden van het kassaldo waarbij de kosten van een transactie juist gelijk zijn aan de maximaal mogelijke reductie in die verwachte kosten worden de controlegrenzen genoemd. Het bij een controlegrens behorende kassaldo tot waar een transactie uitgevoerd moet worden om de maximale reductie in verwachte kosten te verkrijgen, noemt men vaak het terugkeerpunt. Het strategisch liquiditeitsprobleem is nu de bepaling van de waarden van de optimale controlegrenzen en terugkeerpunten, gegeven de kansverdeling van de kassaldooveranderingen en de waarden van de kostenparameters.

Analoog aan de problematiek uit de voorraadtheorie, waarin het optimale beleid op een eenduidige wijze te beschrijven is door twee beleidsparementen (het bestelpunt en het bestelniveau), heeft in het onderzoek naar de optimaliteit van het liquiditeitsbeleid de vraag centraal gestaan of het optimale liquiditeitsbeleid beschreven kan worden door vier beleidsparementen: een onderste controlegrens, een onderste terugkeerpunt, een bovenste terugkeerpunt en een bovenste controlegrens.

Aan het genoemde vraagstuk is het tweede hoofdstuk gewijd. Hierin blijkt duidelijk dat men door gebruik te maken van wiskundige methoden een goed gestructureerd antwoord kan geven op het gestelde probleem.

Het berekenen van de optimale oplossing, gegeven de waarden van de probleemparameters, wordt in het derde hoofdstuk besproken. Hierin worden ook, uitgaande van per periode onafhankelijk en identiek normaal verdeelde kassaldooveranderingen, de optimale oplossingen voor de relevante waarden van de probleemparameters van het liquiditeitsprobleem berekend. Zoals uit de resultaten blijkt, wordt het optimale beleid voor de gekozen waarden van de probleemparameters in principe volledig gekarakteriseerd door vier beleidsparementen. De berekende waarden van de beleidsparementen en de gevonden verbanden tussen de beleidsparementen en de probleemparameters vormen de basis voor de rest van het onderzoek.

Met de berekening van de optimale beleidsparementen door gebruik te ma-

ken van de beschikbare methoden is nogal wat rekenwerk verbonden. Dit is niet bevorderlijk voor de toepassing van de strategische modellen. Daarom hebben wij onderzocht of het mogelijk is eenvoudig berekenbare formules te construeren die bij toepassing tot nauwelijks hogere verwachte kosten per periode leiden dan het optimale beleid.

Om dit doel te bereiken zijn de hiervoor in aanmerking komende methoden uit de besliskundige literatuur nader onderzocht en uitgebreid. De motivering van de gekozen methoden wordt gegeven in hoofdstuk vier. De toepassing en aanpassing in de hoofdstukken vijf, zes en zeven.

In hoofdstuk vijf hebben wij de uit de voorraadtheorie beschikbare benaderingsmethoden onderzocht. Zoals uit de resultaten blijkt is na aanpassing de door Wagner, O'Hagan en Lundh (1965) ontwikkelde methode voor het benaderen van de optimale beleidsparameters, zeer geschikt indien de probleemparameters aan bepaalde voorwaarden voldoen.

In hoofdstuk zes is de door Schneeweiss (1977) ontwikkelde lineaire beslissingsregel voor een niet kwadratische doelstellingsfunctie onderzocht. Dat deze beslissingsregel een goede benadering geeft bij een verwachte kassaldooverandering per periode gelijk aan nul en alleen proportionele transactiekosten is reeds bekend uit de literatuur. In hoofdstuk zes wordt de beslissingsregel zo geformuleerd dat er ook redelijke resultaten te bereiken zijn bij een verwachtingswaarde ongelijk aan nul en zowel vaste als proportionele transactiekosten.

In hoofdstuk zeven wordt de door Constantinides (1976) gebruikte methode voor het bepalen van de optimale beleidsparameters, indien de controle continu plaatvindt, toegepast om de optimale waarden van de beleidsparameters bij continue controle te bepalen. Worden de hiermee gevonden waarden gebruikt als alternatief voor de optimale beleidsparameters in het periodieke probleem, dan wijken in het algemeen bij een verwachte kassaldooverandering per periode gelijk aan nul, de verwachte kosten per periode nauwelijks af van de minimaal verwachte kosten bij een optimaal beleid.

Gebruik makend van de in hoofdstuk drie gevonden verbanden tussen de probleemparameters en de optimale beleidsparameters en van de resultaten uit de hoofdstukken vijf, zes en zeven, worden in hoofdstuk acht relatief eenvoudig berekenbare benaderingsformules geconstrueerd voor de beleidsparameters van het liquiditeitsprobleem met een verwachte kassal-

doverandering per periode ongelijk aan nul. Uit de resultaten blijkt dat toepassing van de met deze formules berekende beleidsparameters niet tot noemenswaardig hogere kosten leidt dan het optimale beleid.

Bijlage A Partiële karakterisering van het optimale beleid

In paragraaf 2.5 is geconstateerd dat de minimaal verwachte kosten in de laatste periode, $H_1(x_1)$, geen convexe functie zijn van het saldo aan het begin van de laatste periode indien ten minste één terugkeerpunt een eindige waarde aanneemt. Hierdoor is het in het algemeen niet meer mogelijk het optimale beleid voor het meer-perioden probleem volledig te karakteriseren door slechts vier beleidsparameters. Wel is het mogelijk het optimaal beleid gedeeltelijk te karakteriseren door vier beleidsparameters, indien de vaste kosten alleen verbonden zijn aan een transactie waardoor het kassaldo vermeerderd of waardoor het kassaldo vermindert wordt, door gebruik te maken van het begrip "K-convexiteit". Ook is het mogelijk het optimaal beleid gedeeltelijk te karakteriseren door meer dan vier beleidsparameters, indien er zowel vaste transactiekosten aan een kassaldovermeerdering als aan een kassaldovermindering verbonden zijn, door gebruik te maken van een convexe begrenzingstechniek. In deze bijlage worden beide technieken afzonderlijk besproken.

A.1 Partiële karakterisering van het optimale beleid door gebruik te maken van het begrip "K-convexiteit"

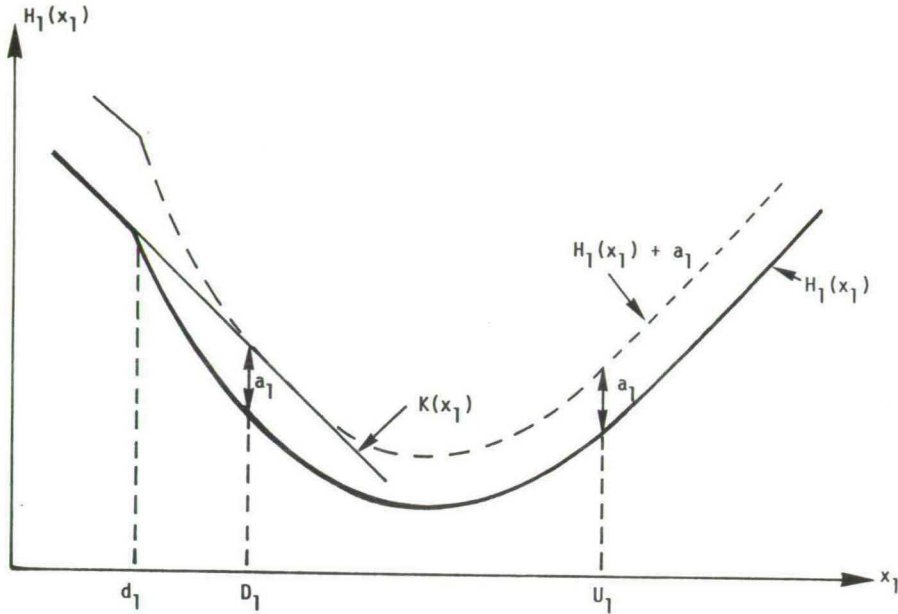
Girgis (1968) maakt voor de karakterisering van het optimale beleid indien er vaste transactiekosten verbonden zijn aan een saldoovermeerdering of een saldovermindering, gebruik van het begrip "K-convexiteit". Een differentieerbare functie $f(x)$ is rechts K-convex in x indien:

$$f(x+c) - f(x) - c \cdot f'(x) + K \geq 0$$

voor elke $c \geq 0$ en voor elke x , waarbij $f'(x)$ de eerste rechter afgeleide is van $f(x)$ naar x .

Uit deze definitie volgt dat iedere convexe functie rechts K-convex is voor iedere $K \geq 0$.

In figuur A.1 is de functie $H_1(x_1)$, indien er geen vaste transactiekosten verbonden zijn aan een kassaldovermindering, getekend.



Figuur A.1 De functie $H_1(x_1)$ voor $a_1 > 0$ en $a_2 = 0$

Dat deze $H_1(x_1)$ zowel rechts a_1 -convex is op $(-\infty, d_1]$ als op (d_1, ∞) volgt uit de zojuist genoemde eigenschap. Dat $H_1(x_1)$ ook rechts a_1 -convex is voor $x \leq d_1 < x + c$ volgt uit figuur A.1, waarin geldt $K(x_1) := H_1(x_1) + c \cdot H'_1(x)$ voor $x \leq d_1$. Immers omdat $a_1 + H_1(x_1 + c) > K(x_1)$ geldt ook:

$$H_1(x_1 + c) - H_1(x_1) - c \cdot H'_1(x_1) + a_1 > 0$$

Op een zelfde wijze kan worden aangetoond dat $H_1(x_1)$ links a_2 -convex is door gebruik te maken van de definitie van een links a_2 -convexe functie.

Voor het optimaal zijn van een (d_2, D_2, U_2, u_2) -beleid zou moeten gelden dat $H_1(x_1)$ rechts a_1 -convex is op het interval $(-\infty, u_2]$ en links a_2 -convex op het interval $[d_2, \infty)$ indien er zowel vaste transactiekosten verbonden zijn met een kassaldovermeerdering als met een kassaldovermindering.

Aan deze voorwaarde wordt, zoals door Neave (1970) is aangetoond, niet altijd voldaan.

Is echter $a_1 > 0$ en $a_2 = 0$ dan is $H_n(x_n)$ wel rechts a_1 -convex en indien $a_2 > 0$ en $a_1 = 0$ dan is $H_n(x_n)$ links a_2 -convex en kan de structuur van

het optimale beleid bepaald worden zoals bewezen is door Girgis.

Omdat voor $a_1 > 0$ en $a_2 = 0$ de functie $H_n(x_n)$ rechts a_1 -convex is kunnen de situaties zoals weergegeven op de intervallen III en V in figuur 2.6 (blz. 35) niet optreden. Immers op deze intervallen geldt voor $x_n + c = D_n$ en $x_n + c = D'_n$:

$$G_n(x_n) + b_1 \cdot x_n > G_n(x_n + c) + b_1 \cdot (x_n + c) + a_1$$

Hieruit volgt:

$$G_n(x_n + c) - G_n(x_n) + b_1 \cdot c + a_1 < 0 \quad (\text{A.1})$$

Omdat voor het maximum op genoemde intervallen geldt: $G'_n(x) = -b_1$, volgt hieruit na substitutie in (A.1):

$$G_n(x_n + c) - G_n(x_n) - c \cdot G'_n(x_n) + a_1 < 0$$

Dit impliceert dat $G_n(x_n)$ niet rechts a_1 -convex is, zodat de getekende situaties strijdig zijn met het a_1 -convex zijn van $G_n(x_n)$.

A.2 Partiële karakterisering van het optimale beleid door gebruik te maken van een convexe begrenzingspolitiek

Neave (1970) gebruikte bij de gedeeltelijke karakterisering van het optimale beleid een convexe begrenzingsstechniek voor het definiëren van de beleidsparameters d_n^+ en u_n^- . In deze bijlage wordt de convexe begrenzingsstechniek geïllustreerd voor het twee-perioden probleem er van uitgaande dat zowel de vaste transactiekosten verbonden aan een saldoovermeerdering als aan een saldoovermindering ongelijk nul en aan elkaar gelijk zijn ($a_1 = a_2 \neq 0$). Het algemene geval kan op eenzelfde wijze worden afgeleid.

De recursievergelijking voor het twee-perioden probleem kan overeenkomstig formule (2.35) geschreven worden als:

$$H_2(x_2) = \min_{y_2 > x_2} [a_1 + b_1 \cdot (y_2 - x_2) + G_2(y_2)]$$

$$G_2(x_2) \quad (A.2)$$

$$\min_{y_2 < x_2} [a_2 + b_2 \cdot (x_2 - y_2) + G_2(y_2)]$$

en de hieruit volgende optimale beleidsparameters D_2 , U_2 , d_2 en u_2 worden, overeenkomstig (2.25), (2.26), (2.36) en (2.37), gegeven door:

$$b_1 \cdot (D_2 - x_2) + G_2(D_2) = \min_{y_2} [b_1 \cdot (y_2 - x_2) + G_2(y_2)] \quad (A.3)$$

$$b_2 \cdot (x_2 - U_2) + G_2(U_2) = \min_{y_2} [b_2 \cdot (y_2 - x_2) + G_2(y_2)] \quad (A.4)$$

$$d_2 = \min[x_2 | G_2(x_2) - G_2(D_2) = a_1 + b_1 \cdot (D_2 - x_2)] \quad (A.5)$$

$$u_2 = \max[x_2 | G_2(x_2) - G_2(U_2) = a_1 + b_2 \cdot (x_2 - U_2)] \quad (A.6)$$

Voor het bepalen van de beleidsparameters d_2^+ en u_2^- construeren we op de volgende wijze een convexe functie $B_1(x)$:

$$H_1(x_1) \quad , \text{ indien } x_1 < d_1 ;$$

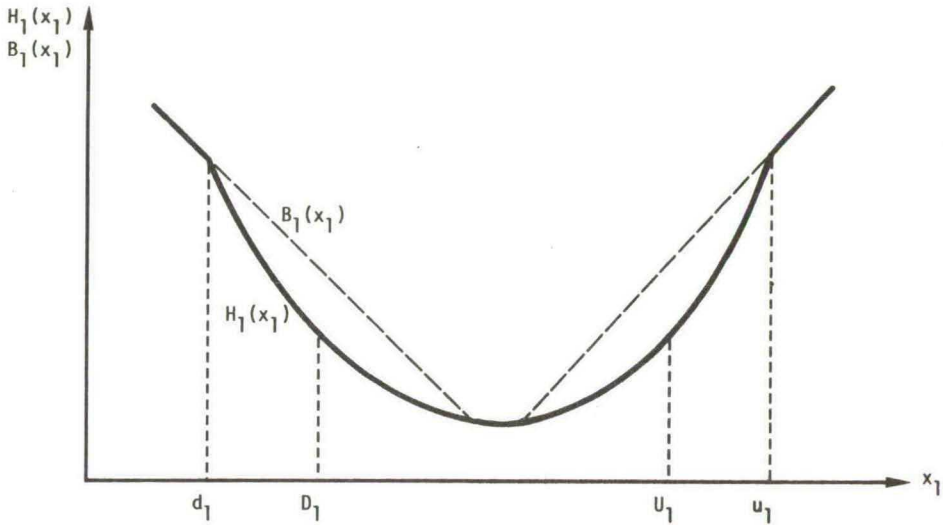
$$a_1 + b_1 \cdot (D_1 - x_1) + L(D_1)$$

$$B_1(x_1) = \max \quad L(x_1) \quad , \text{ indien } d_1 \leq x_1 < u_1 ;$$

$$a_2 + b_2 \cdot (x_1 - U_1) + L(U_1) ,$$

$$H_1(x_1) \quad , \text{ indien } u_1 \leq x_1 .$$

Het bewijs dat de functie $B_1(x_1)$ convex is in x_1 en dat bovendien geldt dat $B_1(x_1) \geq H_1(x_1) \geq B_1(x_1) - a_1$ voor elke x_1 wordt gegeven door Neave (1970, blz. 480). Een voorbeeld van een functie $B_1(x_1)$ uitgaande van figuur 2.5, wordt gegeven in figuur A.2.



Figuur A.2 Een voorbeeld van de functie $B_1(x_1)$

Gebruikmakend van de geïntroduceerde functie $B_1(x)$ definiëren we overeenkomstig (2.22) een functie $J_2(y_2)$:

$$J_2(y_2) = L(y) + \alpha \cdot \int_{-\infty}^{\infty} B_1(y_2 - k_2) \cdot f(k_2) dk_2.$$

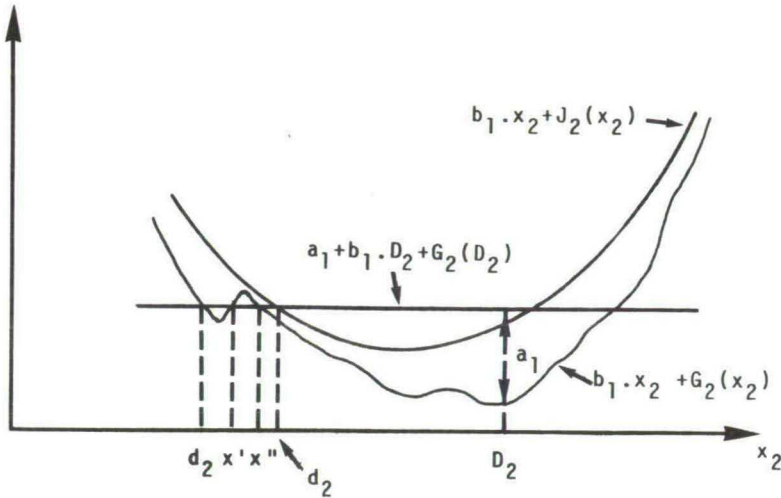
Analoog aan (A.4) en (A.5) definiëren we hiermee de beleidsparameters d_2^+ en u_2^- als volgt:

$$d_2^+ = \min[x_2 \quad b_1 \cdot x_2 + J_2(x_2) = a_1 + b_1 \cdot D_1 + G_2(D_2), D_2]$$

$$u_2^- = \min[x_2 \quad -b_2 \cdot x_2 + J_2(x_2) = a_1 - b_2 \cdot U_2 + G_2(U_2), U_2]$$

Door deze wijze van definiëren worden alle waarden van $d_2^+ > D_2$ en van $u_2^- < U_2$ die ook aan de aan x gestelde voorwaarde voldoen uitgesloten.

Een voorbeeld van de bepaling van de punten D_2 , d_2 en d_2^+ wordt gegeven in figuur A.2.



Figuur A.3 De bepaling van de optimale beleidsparameters D_2 , d_2 en d_2^+

Omdat uit (A.3) volgt dat het optimaal is het saldo te vermeerderen tot het punt D_2 , indien het kassaldo door middel van een transactie vermeerderd wordt, volgt uit (A.2) dat het beter is het saldo te vermeerderen dan te handhaven indien geldt:

$$G_2(x_2) > a_1 + b_1 \cdot (D_2 - x_2) + G_2(D_2),$$

omdat een saldoovermeerdering door middel van een transactie altijd tot lagere verwachte kosten leidt dan handhaving van het saldo. Door de ongelijkheid te herschrijven als:

$$b_1 \cdot x_2 + G_2(x_2) > a_1 + b_1 \cdot D_2 + G_2(D_2),$$

is uit figuur A.3 duidelijk af te lezen dat het, gegeven de getekende kostenfuncties, beter is het kassaldo te vermeerderen dan het te handhaven indien geldt: $x_2 < d_2$ of $x' < x_2 < x''$. Op een zelfde wijze kan worden aangetoond dat het beter is het kassaldo te handhaven dan het door een transactie te vermeerderen indien geldt: $d_2 < x_2 < x'$ of $x_2 > x''$, omdat nu de transactiekosten altijd hoger zijn dan de reductie in verwachte kosten.

Door de introductie van de functie $B_1(x_1)$ is het mogelijk het optimale beleid nader te specificeren indien het saldo aan het begin van de tweede periode voor het einde van het plantijdvak tot het interval $[d_2, u_2]$ behoort. Op een zelfde wijze zijn de nadere specificaties, zoals gegeven door (2.39), af te leiden.

Bijlage B Berekening van de optimale oplossing

Voor de berekening van de optimale oplossing hebben we in hoofdstuk 3 gebruik gemaakt van een lineaire- en van een dynamische programmeringsformulering. In deze bijlage wordt eerst het gebruikte lineair programmeringsmodel geformuleerd en vervolgens wordt de methode die bij het oplossen met behulp van dynamische programmering gehanteerd is besproken.

B.1 Het gebruikte lineair programmeringsmodel

Voor de formulering van het gehanteerde lineair programmeringsmodel gaan we uit van de in paragraaf 3.3 gegeven doelstellingsfunctie (3.8) en de daarbij behorende randvoorwaarden (3.8a) t/m (3.8c):

$$\text{minimaliseer } \sum_{i=1}^N \sum_{w=1}^N C(i,w) \cdot \pi_{iw} \quad (3.8)$$

onder de voorwaarden:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{w=1}^N \pi_{iw} = 1 \quad (3.8a)$$

$$\sum_{w=1}^N \pi_{jw} = \sum_{i=1}^N \sum_{w=1}^N \pi_{iw} p_{ij}^w \quad j = 2, 3, \dots, N \quad (3.8b)$$

$$\pi_{iw} > 0 \quad i, w = 1, 2, \dots, N \quad (3.8c)$$

De alternatieve formulering van dit probleem wordt verkregen door een transactie van $X(i)$ naar $Y(w)$ te splitsen in een transactie van $X(i)$ naar het nulsaldo en van het nulsaldo naar $Y(w)$. Voor het aanbrengen van deze verandering maken we gebruik van de volgende reeds in paragraaf 3.3 geïntroduceerde variabelen:

$$\delta_i := \pi_{i1} \quad i = 1, 2, \dots, N ;$$

$$\eta_i := \sum_{w=i+1}^N \pi_{iw} \quad i = 1, 2, \dots, N-1 ;$$

$$\omega_i := \sum_{w=1}^{i-1} \pi_{iw} \quad i = 2, 3, \dots, N ;$$

$$\rho_w := \sum_{i=1}^{w-1} \pi_{iw} \quad w = 2, 3, \dots, N ;$$

$$\nu_w := \sum_{i=w+1}^N \pi_{iw} \quad w = 1, 2, \dots, N-1 .$$

Bovendien definiëren we nog de volgende variabelen:

$$\xi_j := \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{w=j+1}^N \pi_{iw} \quad j = 2, 3, \dots, N-1 ;$$

$$\zeta_j := \sum_{i=j+1}^N \sum_{w=1}^{j-1} \pi_{iw} \quad j = 2, 3, \dots, N-1 .$$

Deze variabelen representeren eveneens cumulatieve invariante kansen. Zij dienen echter slechts om de voorwaarde dat $\pi_{iw} > 0$ ($i, w = 1, 2, \dots, N$) in de alternatieve formulering op te nemen, doch ze zijn voor de interpretatie van de resultaten niet van belang.

Gebruikmakend van de geïntroduceerde variabelen kan de doelstellingsfunctie van de alternatieve formulering als volgt uit de oorspronkelijke formulering (3.8) verkregen worden:

a) vervang de $N(N-1)/2$ variabelen π_{iw} ($i = 1, 2, \dots, N-1$; $i < w$) met bijbehorende kosten $a_1 + b_1(Y(w) - X(i)) + L(Y(w))$ door de $3N-4$ variabelen η_i , ξ_j en ρ_w ($i = 1, 2, \dots, N-1$; $j = 2, 3, \dots, N-1$; $w = 2, 3, \dots, N$) met bijbehorende kosten respectievelijk: $-b_1 \cdot X(i)$, 0 en $a_1 + b_1 \cdot Y(w) + L(Y(w))$;

b) vervang de $N(N-1)/2$ variabelen π_{iw} ($i = 2, 3, \dots, N = w > i$) met bijbehorende kosten $a_2 + b_2 \cdot (X(i) - Y(w)) + L(Y(w))$ door de $3N-4$ variabelen ω_i , ζ_j en ν_w ($i = 1, 2, \dots, N$; $j = 2, 3, \dots, N-1$; $w = 1, 2, \dots, N-1$) met bijbehorende kosten respectievelijk: $b_2 \cdot X(i)$, 0 en $a_2 - b_2 \cdot Y(w) + L(Y(w))$;

c) Vervang de N variabelen π_{iw} met $i = w$ door δ_1 .

De alternatieve lineaire programmeringsformulering wordt nu, gebruikmakend van (3.9):

$$p_i^w = P[X_{t+1} = X(i) \mid Y_t = Y(w)]$$

gegeven door:

$$\begin{aligned} & \text{minimaliseer} \quad \sum_{i=1}^N L(X(i)) \cdot \delta_i + \sum_{i=1}^N -b_1 \cdot X(i) \cdot \eta_i \\ & + \sum_{w=2}^N [a_1 + b_1 \cdot Y(w) + L(Y(w))] \cdot \rho_w + \sum_{i=2}^N b_2 \cdot X(i) \cdot \omega_i \\ & + \sum_{w=1}^{N-1} [a_2 - b_2 \cdot Y(w) + L(Y(w))] \cdot v_w \end{aligned}$$

onder de voorwaarden:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \delta_i + \sum_{w=2}^N v_w + \sum_{w=1}^{N-1} \rho_w = 1 \\ & \delta_i - \sum_{w=1}^N p_i^w \cdot \delta_w + \eta_i - \sum_{w=2}^N p_i^w \cdot v_w + \omega_i - \sum_{w=1}^{N-1} p_i^w \cdot \rho_w = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \\ & -\eta_j + \xi_j + \xi_{j+1} + v_{j+1} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, N-1 \\ & -\omega_j + \zeta_{j-1} - \zeta_j + \rho_{j-1} = 0 \quad j = 2, 3, \dots, N \\ & \delta_i, \eta_i, m_i, \rho_i, v_i, \xi_i, \zeta_i > 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \\ & \omega_1 = v_1 = \xi_1 = \zeta_1 = \eta_N = \rho_N = \xi_N = \zeta_N = 0 \end{aligned}$$

B.2 Berekening van de optimale beleidsparameters met dynamische programmering

Bij de berekening van de optimale beleidsparameters met dynamische programmering gaan we er vanuit dat de kassaldooveranderingen per periode

identiek en onafhankelijk normaal verdeeld zijn en dat het optimale beleid een (d_n, D_n, U_n, u_n) -structuur heeft:

$$\begin{aligned}
 & D_n - x, \text{ indien } x_n < d_n; \\
 v(x_n) = & 0, \quad " \quad d_n \leq x_n \leq u_n; \quad (B.1) \\
 & U_n - x, \quad " \quad x_n > u_n.
 \end{aligned}$$

Op grond van de laatstgenoemde veronderstelling en gebruikmakend van (3.5):

$$I_n(y) := L(y) + (n-1) \int_{-\infty}^{\infty} C_{n-1}(y-k) f(k) dk \quad (B.2)$$

kunnen de gemiddelde verwachte kosten per periode geschreven worden als

$$\begin{aligned}
 & 1/n [a_1 + b_1 \cdot (D_n - x_n) + I_n(D_n)], \text{ indien } x_n < d_n; \\
 C_n(x_n) = & 1/n \cdot I_n(x_n), \quad " \quad d_n \leq x_n \leq u_n; \\
 & 1/n [a_2 - b_2 \cdot (U_n - x_n) + I_n(U_n)], \quad " \quad x_n > u_n.
 \end{aligned}$$

Voor $n \geq 2$ kan (B.2) nu herschreven worden als:

$$\begin{aligned}
 I_n(y) = & L(y) + \int_{y-d_{n-1}}^{\infty} [a_1 + b_1 \cdot D_{n-1} + I_n(D_{n-1}) - b_1 \cdot (y-k)] \cdot f(k) dk \\
 & + \int_{y-u_{n-1}}^{y-d_{n-1}} I_{n-1}(y-k) f(k) dk \quad (B.3) \\
 & + \int_{-\infty}^{y-u_{n-1}} [a_2 - b_2 U_{n-1} + I_{n-1}(U_{n-1}) + b_2 \cdot (y-k)] \cdot f(k) dk.
 \end{aligned}$$

Omdat we er van uitgaan dat het optimale beleid volledig gekarakteriseerd wordt door de vier beleidsparemeters kunnen (3.16) t/m (3.19) ook geschreven worden als:

$$b_1 \cdot D_n + I_n(D_n) = \min_y [b_1 \cdot y + I_n(y)] \quad (B.4)$$

$$-b_2 \cdot U_n + I_n(U_n) = \min_y [-b_2 \cdot y + I_n(y)] \quad (B.5)$$

$$d_n \leq D_n \text{ en } b_1 \cdot d_n + I_n(d_n) = \min_y [a_1 + b_1 \cdot y + I_n(y)] \quad (B.6)$$

$$u_n \geq U_n \text{ en } -b_2 \cdot u_n + I_n(u_n) = \min_y [a_2 - b_2 \cdot y + I_n(y)] \quad (B.7)$$

Uit (B.4) en (B.6) respectievelijk (B.5) en (B.7) volgt nu dat (B.3) geschreven kan worden als:

$$\begin{aligned} I_n(y_n) = & L(y_n) + [b_1 \cdot (d_{n-1} - y) + I_{n-1}(d_{n-1})] \cdot [1 - F(y - d_{n-1})] \\ & + b_1 \cdot \int_{y-d_{n-1}}^{\infty} k \cdot f(k) \, dk + \int_{y-u_{n-1}}^{y-d_{n-1}} I_{n-1}(y-k) \cdot f(k) \, dk \\ & + [-b_2 \cdot (u_{n-1} - y) + I_{n-1}(u_{n-1})] \cdot F(y - u_{n-1}) \\ & - b_2 \cdot \int_{\infty}^{y-u_{n-1}} k \cdot f(k) \, dk. \end{aligned} \quad (B.8)$$

Omdat de kassaldooverandering per periode normaal verdeeld is geldt:

$$\int_d^u k \cdot f(k) \, dk = \sigma^2 \cdot [f(d) - f(u)] + \mu \cdot [F(u) - F(d)], \quad (B.9)$$

en kan $L(y)$ geschreven worden als:

$$L(y) = (h+s)[(y-\mu) \cdot F(y) + \sigma^2 \cdot f(y)] - s(y-\mu) \quad (B.10)$$

Hieruit volgt:

$$L'(y) = (h+s) \cdot F(y) - s \quad (B.11)$$

Op eenzelfde wijze als (B.10) kan (B.8) herschreven worden als:

$$\begin{aligned} I_n(y) = & L(y) + [b_1 \cdot (d_{n-1} - y) + I_n(d_{n-1})] \cdot [1 - F(y - d_{n-1})] \\ & + b_1 [\sigma^2 \cdot f(y - d_{n-1}) + \mu \cdot (1 - F(y - d_{n-1}))] \\ & + \int_{y-u_{n-1}}^{y-d_{n-1}} I_{n-1}(y-k) \cdot f(k) \, dk + [-b_2 \cdot (u_{n-1} - y) + I_{n-1}(u_{n-1})] \cdot F(y - u_{n-1}) \\ & + b_2 \cdot [\sigma^2 \cdot f(y - u_{n-1}) + \mu \cdot F(y - u_{n-1})] \end{aligned} \quad (B.12)$$

Differentiatie van $I_n(y)$ naar y geeft:

$$\begin{aligned} I'_n(y) = & L'(y) - b_1 \cdot [1 - F(y - d_{n-1})] \\ & + \int_{y-u_{n-1}}^{y-d_{n-1}} I'_n(y-k) \cdot f(k) \, dk + b_2 \cdot F(y - u_{n-1}) \end{aligned} \quad (B.13)$$

Door gebruik te maken van (B.10) t/m (B.13) zijn nu de optimale beleidsparameters te berekenen.

Evenals in het model met gediscoteerde kosten hangt het van de waarden van de probleemparameters af of de beleidsparameters eindige waarden aannemen. Bij de berekening wordt daarom gebruik gemaakt van de door Inderfurth (1977, blz. 24 e.v.) bewezen stelling: Is $h > 0$ en $s > 0$ dan

bestaan er eindige gehele getallen $n_1 = [b_1/s]$ en $n_2 = [b_2/h]$, met $[e]$ het kleinste gehele getal groter dan of gelijk aan e , zodat geldt:

$$\begin{aligned} D_n &= -\infty, & \text{indien } n < n_1; \\ D_n &= I_n'^{-1}(-b_1) & \text{" } n \geq n_1; \\ U_n &= +\infty & \text{" } n < n_2; \\ U_n &= I_n'^{-1}(b_2) & \text{" } n \geq n_2 \end{aligned} \tag{B.14}$$

Voor het berekenen van de beleidsparameters is de volgende procedure gehanteerd:

- 1) bepaal n_1 en n_2 ;
- 2) bepaal overeenkomstig (B.14), indien nodig gebruikmakend van (B.10), D_1 en U_1 ;
- 3) bepaal d_1 respectievelijk u_1 uit:

$$d_1 = -\infty, \text{ indien } n < n_1, \quad u_1 = +\infty, \text{ indien } n < n_2,$$

indien $n \geq n_1$, d_1 middels de Regular Falsi als die waarde van y kleiner of gelijk aan D_1 waarvoor geldt:

$$b_1 \cdot y + L(y) = a + b_1 \cdot D_1 + L(D_1)$$

en indien $n \geq n_2$, u_1 op een overeenkomstige wijze;

- 4) bepaal I_2 en I_2' m.b.v. de Simpson-regel en vervolgens op een zelfde wijze als in 2) en 3) gebruikmakend van (B.4) t/m (B.7) en (B.14): D_2 , U_2 , d_2 en u_2 ;
- 5) herhaal 4) voor $n = 3, 4, \dots$, tot het grootste absolute verschil tussen twee dezelfde beleidsparameters in twee opeenvolgende perioden kleiner is dan een bepaalde waarde ϵ .

Bijlage C De proportionaliteitseigenschappen van het optimale beleid

De proportionaliteitseigenschappen van het optimale beleid kunnen het eenvoudigst bewezen worden door gebruik te maken van bijlage B.2. Noteren we een functie, bv. $L(y)$, indien hierin de probleemparameters, bv. h en s , met een factor $\lambda > 0$ vermenigvuldigd worden als: $L(y|\lambda.h, \lambda.s)$ dan volgt uit (B.10):

$$L(y|\lambda.h, \lambda.s) = \lambda.L(y) \quad (C.1)$$

Uit (B.5) t/m (B.8) volgt eigenschap 2.1 voor $n = 1$. Substitutie van het resultaat in (B.12) geeft voor $n = 2$:

$$I_2(y|\lambda.h, \lambda.s, \lambda.b_1, \lambda.b_2) = \lambda.I_2(y)$$

Uit (B.5) t/m (B.8) volgt nu eigenschap 2.1 voor $n = 2$ en op eenzelfde wijze kan worden aangetoond dat eigenschap 2.1 geldt voor elke n .

Voor het bewijs van proportionaliteitseigenschap 2.2 moet gebruik gemaakt worden van:

$$F(\lambda y|\lambda.\mu, \lambda.\sigma) = F(y) \quad (C.2)$$

$$f(\lambda y|\lambda.\mu, \lambda.\sigma) = f(y)/\lambda \quad (C.3)$$

Uit (B.10) volgt nu:

$$L(y|\lambda.\mu, \lambda.\sigma) = \lambda.L(y) \quad (C.4)$$

en uit (B.5) t/m (B.8) eigenschap 2.2 voor $n = 1$. Substitutie van dit resultaat en (C.2) t/m (C.4) in (B.12) geeft voor $n = 2$:

$$I_2(y|\lambda.\mu, \lambda.\sigma) = \lambda.I_2(y)$$

Uit (B.5) t/m (B.8) volgt nu eigenschap 2.2 voor $n = 2$ en op eenzelfde wijze kan worden aangetoond dat eigenschap 2.2 geldt voor elke n .

Bijlage D Bepaling van de optimale transactie-omvang

Door Tobin (1958) is de optimale transactie-omvang bepaald ervan uitgaande dat tekorten niet toegestaan zijn en dat alleen over de belegde middelen een opbrengst verkregen wordt en dat de transactiekostenfunctie symmetrisch is. In deze bijlage wordt de optimale transactie-omvang, overeenkomstig het in paragraaf 3.1 geformuleerde probleem bepaald onder de veronderstelling dat ook over kassaldo een opbrengst verkregen wordt en dat de transactiekosten verbonden met een kassaldoovermeerdering niet gelijk behoeven te zijn aan die verbonden met een zelfde saldoovermindering.

Omdat we nu een model hanteren waarin zowel het kassaldo als de hoeveelheid belegde middelen op ieder tijdstip van belang zijn definiëren we:

$x(t)$: het kassaldo op tijdstip t ;

$q(t)$: de hoeveelheid belegde middelen op tijdstip t .

De verdeling in de tijd van de beschikbare kasmiddelen over kasgeld:

$x(t)$ en korte termijnbeleggingen: $q(t)$ wordt nu gegeven door:

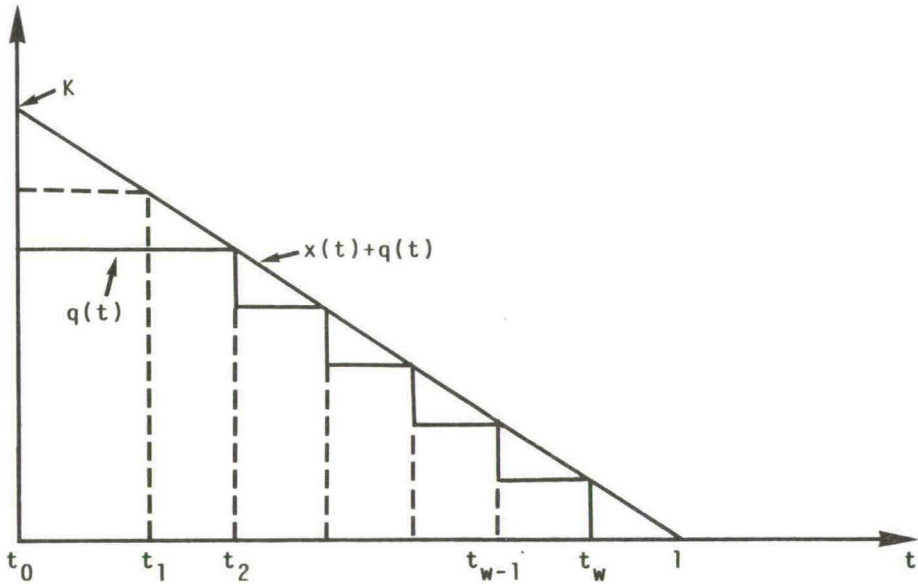
$$x(t) + q(t) = (1-t)K \quad 0 \leq t \leq 1$$

en een mogelijk verdeling hiervan wordt grafisch weergegeven in figuur D.1.

De netto-opbrengst gedurende een periode van een tijdseenheid over het aan het begin van de periode beschikbare kassaldo, indien er w transacties worden uitgevoerd kan bepaald worden uit:

$$\begin{aligned} R_w &= (1-t_2) \cdot K \cdot t_2 \cdot r + \frac{1}{2} \cdot K \cdot t_2^2 \cdot c + \\ &\quad (1-t_3) \cdot K \cdot (t_3 - t_2) \cdot r + \frac{1}{2} \cdot K \cdot (t_3 - t_2)^2 \cdot c + \dots \end{aligned} \quad (D.1)$$

$$\frac{1}{2} K \cdot (1-t_w)^2 \cdot c - (b_1 + b_2)(1-t_2) \cdot K - (a_2 + (w-1)a_1)$$



Figuur D.1 Een verdeling over kas en beleggingen bij w transacties

Hierin is de eerste term rechts van het gelijkteken gelijk aan het produkt van het bedrag dat gedurende het interval $[0, t_2)$ belegd is: $K \cdot (1 - t_2)$ en de rente die over dit bedrag gedurende dit tijdsinterval per geldeenheid verkregen wordt. De tweede term is gelijk aan de opbrengst over het kassaldo gedurende het interval $[0, t_2)$. De volgende $2w - 3$ termen bevatten de opbrengsten van de beleggingen en het kassaldo gedurende de tijdsintervallen $[t_2, t_3), [t_3, t_4), \dots, [t_w, 1)$. De twee laatste termen bevatten aan de transactiekosten. Deze zijn immers gelijk aan $(b_1 + b_2)$ maal het op tijdstip t_0 belegde bedrag plus de vaste transacties.

Substitutie van $t_1 = (b_1 + b_2) / (r - c)$ in (D.1) en partiële differentiatie van het resultaat naar t_i voor $i = 2, 3, \dots, w$ geeft indien de partiële afgeleiden gelijk gesteld worden aan nul na enige herleiding:

$$t_1 - 2t_2 + t_3 = 0$$

$$t_{w-1} - 2t_w = -1$$

Hieruit volgt:

$$t_i = t_1 + \frac{i-1}{w} (1-t_1), \text{ voor } i = 2, 3, \dots, w \quad (5.2)$$

Substitutie van (5.1), (5.2) en $h = r-c$ in (D.1) geeft de optimale opbrengst bij w transacties:

$$R_w = \frac{w-1}{2w} \cdot K \cdot h(1-(b_1+b_2)/h)^2 - (a_2+(w-1) \cdot a_1) , \quad (5.3)$$

indien $w \geq 2$ en $h > b_1+b_2$.

Bijlage E Afleidingen behorende bij de lineaire beslissingsregel

E.1 Bepaling van de parameters van de invariante verdeling

De parameters van de invariante verdelingen van de toestands- en beslissingsvariabele kunnen bepaald worden door, gebruikmakend van (6.2), de kasvoorraad aan het begin van een periode in stationaire toestand (x^s) uit te drukken als functie van alle voorafgaande kassaldooveranderingen en de parameters van de lineaire beslissingsregel. Immers (6.2) is ook te schrijven als:

$$x_t = x_{t-1} \cdot (\kappa+1) - \kappa \cdot \theta - k_{t-1}, \quad t = 2, 3, \dots$$

Hieruit volgt:

$$x_2 = x_1 \cdot (\kappa+1) - \kappa \cdot \theta - k_1$$

$$x_3 = x_2 \cdot (\kappa+1) - \kappa \cdot \theta - k_2 = x_1 \cdot (\kappa+1)^2 - \theta \cdot (\kappa+2)^2 + \theta - k_1(\kappa+1) - k_2$$

$$x_4 = x_1 \cdot (\kappa+1)^3 - \theta \cdot (\kappa+1)^3 + \theta - \sum_{j=0}^2 (\kappa+1)^j \cdot k_{3-j}$$

\vdots

$$x_t = x_1 \cdot (\kappa+1)^{t-1} - \theta \cdot (\kappa+1)^{t-1} + \theta - \sum_{j=0}^{t-2} (\kappa+1)^j \cdot k_{t-j-1}$$

Omdat $0 < \kappa+1 < 1$ volgt uit het voorafgaande:

$$x^s = \lim_{t \rightarrow \infty} x_t = \theta - k^s \quad (6.3)$$

waarbij

$$k^s = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{t-2} (\kappa+1)^j \cdot k_{t-j-1}$$

Uit (6.1) volgt:

$$v^s = \kappa \cdot (x^s - \theta)$$

Substitutie van (6.3) geeft:

$$v^s = -\kappa \cdot k^s \quad (6.4)$$

E.2 Bepaling van de verwachte kosten per periode zoals gegeven door (6.13) en (6.14)

Gebruikmaken van (2.3) kan (6.11) geschreven worden als:

$$\begin{aligned} C_{VL} &= h \cdot \int_0^{\infty} x \cdot f_x(x) dx - s \int_{-\infty}^0 x \cdot f_x(x) dx \\ &= (h+s) \int_0^{\infty} x \cdot f_x(x) dx - s \cdot \mu_x \end{aligned} \quad (E.1)$$

Omdat x normaal verdeeld is kan (E.1) gebruikmakend van eigenschap (B.9) herschreven worden als:

$$C_{VL} = (h+s) [\sigma_x^2 \cdot f_x(0) + \mu_x \cdot (1 - F_x(0))] - s \cdot \mu_x \quad (E.2)$$

Omdat we overeenkomstig (6.15) en (6.16) de dichtheidsfunctie en de verdelingsfunctie van een gestandaardiseerde normaal verdeelde variabele noteren als $\phi(\cdot)$ en $\Phi(\cdot)$ geldt:

$$f_x(0) = (1/\sigma_x) \cdot \phi\left(\frac{\mu_x}{\sigma_x}\right) \quad (E.3)$$

en

$$F_x(0) = \Phi\left(-\frac{\mu_x}{\sigma_x}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\mu_x}{\sigma_x}\right) \quad (E.4)$$

zodat (E.1) herschreven kan worden als (6.13):

$$C_{VL} = (h+s) \left[\mu_x \cdot \phi\left(\frac{\mu_x}{\sigma_x}\right) + \sigma_x \cdot \phi\left(\frac{\mu_x}{\sigma_x}\right) \right] - s \cdot \mu_x$$

De bepaling van (6.14) is bijna analoog aan die van (6.13). Immers substitutie van (2.2) in (6.12) geeft na enige herleiding:

$$\begin{aligned} C_{TL} &= \int_0^{\infty} (a_1 + b_1 \cdot v) \cdot f_v(v) dv + \int_{-\infty}^0 (a_2 - b_2 \cdot v) \cdot f_v(v) dv \\ &= a_1 + (a_2 - a_1) \cdot F_v(0) + (b_1 + b_2) \int_0^{\infty} v \cdot f_v(v) dv - b_2 \cdot \mu_v \end{aligned}$$

Gebruikmakend van de eigenschappen van de normale verdeling (E.3) en (E.4) volgt op een zelfde wijze door substitutie (6.14):

$$C_{TL} = a_2 - (a_2 - a_1) \cdot \Phi\left(\frac{\mu_v}{\sigma_v}\right) + (b_1 + b_2) \left[\mu_v \cdot \phi\left(\frac{\mu_v}{\sigma_v}\right) + \sigma_v \cdot \phi\left(\frac{\mu_v}{\sigma_v}\right) \right] - b_2 \cdot \mu_v$$

E.3 Bepaling van de optimale aanpassingscoëfficiënt

Voor de bepaling van de optimale aanpassingscoëfficiënt bij een variabele beslissingsperiode en de optimale normvoorraad gegeven door (6.21) definiëren we:

$$\beta := (h+s) \cdot \sigma^2 \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\phi^{-1}\left(\frac{s}{h+s}\right)\right)^2\right] > 0 \quad (E.5)$$

en eveneens ter vereenvoudiging van de komende bewerkingen:

$$z(\kappa) := \sigma \cdot (2\pi)^{-0,5} [-\kappa(\kappa+2)]^{1,5} > 0$$

en

$$g(\kappa) := (\kappa+1) \cdot \beta - [(a_2 - a_1)(\kappa+2) \cdot \mu - (b_1 + b_2) \cdot \kappa \cdot \sigma^2] \cdot \exp\left[\frac{\kappa+2}{2\kappa} \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

Zodat uit (6.26) volgt

$$\ell(\kappa) = z(\kappa) \cdot g(\kappa) \quad (\text{E.6})$$

Uit (E.6) volgt dat voor $-1 \leq \kappa < 0$, de marginale verandering in de verwachte kosten per periode ten gevolge van een verandering van de aanpassingscoëfficiënt gelijk is aan het produkt van de waarde van $g(\kappa)$ en een getal groter dan nul.

Voor de bepaling van het verloop van de marginale verandering in de verwachte kosten per periode ten gevolge van een verandering van de aanpassingscoëfficiënt op het interval $[-1, 0)$ bepalen we eerst:

$$g(-1) = -[(a_2 - a_1) \cdot \mu + (b_1 + b_2) \cdot \sigma^2] \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2\right] \quad (\text{E.7})$$

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} g(\kappa) = \beta \quad (\text{E.8})$$

Omdat $\exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2\right] > 0$ volgt uit (E.7):

$$g(-1) < 0, \text{ indien } [(a_2 - a_1) \cdot \mu + (b_1 + b_2) \cdot \sigma^2] > 0 \quad (\text{E.9})$$

$$g(-1) = 0, \quad " \quad " \quad = 0 \quad (\text{E.10})$$

$$g(-1) > 0, \quad " \quad " \quad < 0 \quad (\text{E.11})$$

Uit (E.9) t/m (E.11) volgt nu wanneer bij volledige aanpassing de marginale invloed van de aanpassingscoëfficiënt op de verwachte kosten negatief nul of positief is.

Voor de bepaling van het verloop van de marginale invloed van een verandering in de aanpassingscoëfficiënt op de verwachte kosten per periode splitsen we de functie $g(\kappa)$ in drie delen:

$$g_1(\kappa) := (\kappa + 1) \cdot \beta$$

$$g_2(\kappa) := -(a_2 - a_1)(\kappa + 2) \cdot \mu \cdot \exp\left[\frac{\kappa + 2}{2\kappa} \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

$$g_3(\kappa) := (b_1 + b_2) \cdot \kappa \cdot \sigma^2 \cdot \exp\left[\frac{\kappa + 2}{2\kappa} \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

zodat

$$g(\kappa) = \sum_{i=1}^3 g_i(\kappa).$$

Differentiatie van de geïntroduceerde functies geeft

$$\begin{aligned} \frac{dg_1(\kappa)}{d\kappa} &= \beta & \frac{d^2 g_1(\kappa)}{d\kappa^2} &= 0 \\ \frac{dg_2(\kappa)}{d\kappa} &= -(a_2 - a_1) [\kappa^2 - \kappa \cdot (\frac{\mu}{\sigma})^2 - 2(\frac{\mu}{\sigma})^2] \cdot \kappa^{-2} \cdot \mu \cdot \exp[\frac{\kappa+2}{2\kappa} (\frac{\mu}{\sigma})^2] \end{aligned} \quad (E.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 g_2(\kappa)}{d\kappa^2} &= -(a_2 - a_1) [4\kappa + \kappa (\frac{\mu}{\sigma})^2 + 2(\frac{\mu}{\sigma})^2] (\frac{\mu}{\sigma})^2 \cdot \kappa^{-4} \cdot \mu \cdot \exp[\frac{\kappa+2}{2\kappa} (\frac{\mu}{\sigma})^2] \end{aligned} \quad (E.13)$$

$$\frac{dg_3(\kappa)}{d\kappa} = (b_1 + b_2) \kappa^{-1} [\kappa - (\frac{\mu}{\sigma})^2] \cdot \sigma^2 \cdot \exp[\frac{\kappa+2}{2\kappa} (\frac{\mu}{\sigma})^2] > 0$$

$$\frac{d^2 g_3(\kappa)}{d\kappa^2} = (b_1 + b_2) \kappa^{-3} (\frac{\mu}{\sigma})^4 \cdot \sigma^2 \exp[\frac{\kappa+2}{2\kappa} (\frac{\mu}{\sigma})^2] < 0$$

Stellen we $c := (\mu/\sigma)^2$ dan volgt uit (E.12):

$$\frac{dg_2(\kappa)}{d\kappa} < 0, \text{ indien } -1 \leq \kappa < 0.5[c - (c^2 + 8c)^{\frac{1}{2}}]$$

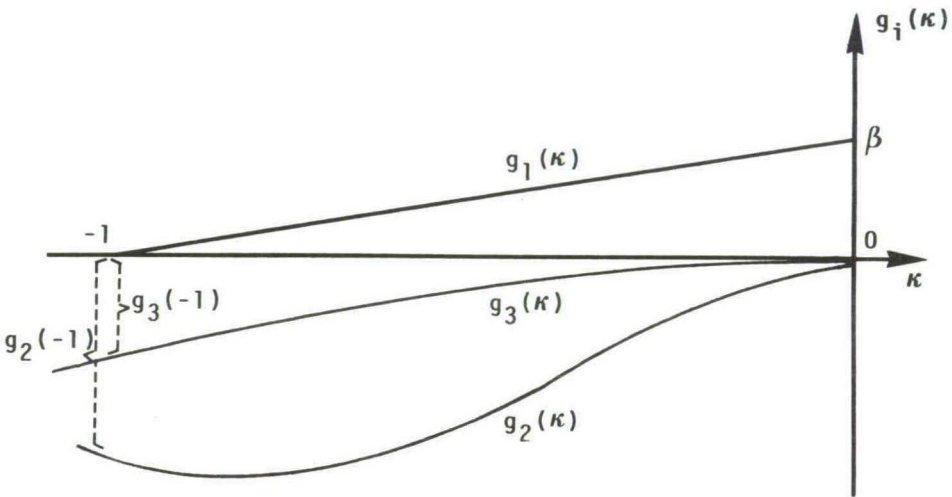
$$\frac{dg_2(\kappa)}{d\kappa} > 0, \text{ indien } 0.5[c - (c^2 + 8c)^{\frac{1}{2}}] < \kappa < 0$$

Uit (E.13) volgt

$$\frac{d^2 g_2(\kappa)}{d\kappa^2} > 0, \text{ indien } -1 < \kappa < -2c/(4+c)$$

$$\frac{d^2 g_2(\kappa)}{d\kappa^2} < 0, \text{ indien } -2c/(4+c) < \kappa < 0$$

Het verloop van de relevante kostenfuncties kan nu grafisch worden weergegeven als in figuur E.1.



Figuur E.1 Een voorbeeld van de functies $g_i(\kappa)$ op het interval $[-1, 0)$ voor $(a_2 - a_1) \cdot \mu > 0$

Omdat $(b_1 + b_2)\sigma^2 > 0$ volgt uit figuur E.1 dat indien $(a_1 - a_2) \cdot \mu > 0$ er altijd een κ op $[-1, 0)$ is zodat $g(\kappa) = 0$.

Is $(a_1 - a_2) \cdot \mu < 0$ doch $(a_1 - a_2) \cdot \mu + (b_1 + b_2) \cdot \sigma^2 > 0$ dan is er eveneens op $(-1, 0)$ een κ waarvoor geldt $g(\kappa) = 0$.

Is echter $(a_1 - a_2) \cdot \mu < 0$ en $(a_1 - a_2) \cdot \mu + (b_1 + b_2) \cdot \sigma^2 < 0$ dan is er geen κ op $(-1, 0)$ zodat geldt $g(\kappa) = 0$. Immers stel:

$$h(\kappa) := (a_2 - a_1)(\kappa + 2) \cdot \mu - (b_1 + b_2) \cdot \kappa \cdot \sigma^2$$

dan is:

$$h(0) = 2(a_2 - a_1) \cdot \mu < 0$$

$$h(-1) = (a_2 - a_1) \cdot \mu + (b_1 + b_2) \cdot \sigma^2 < 0$$

Omdat $h(\kappa)$ een lineaire functie is van κ volgt hieruit:

$$g(\kappa) > 0, \quad -1 \leq \kappa < 0$$

Uit de definitie van $g(\kappa)$ volgt nu dat een verminderde aanpassing alleen maar leidt tot hogere verwachte kosten indien $(a_2 - a_1) \cdot \mu + (b_1 + b_2) \sigma^2 < 0$, zodat de optimale aanpassingscoëfficiënt gelijk is aan -1 .

E.4 Invloed lengte beslissingsperiode op de verwachte transactiekosten

Voor het bepalen van de invloed van de lengte van de beslissingsperiode op de verwachte transactiekosten differentiëren we (6.50) partieel naar m :

$$C_{TL(m)} = \frac{1}{m} [a_2 - (a_2 - a_1) \Phi(\frac{\mu\sqrt{m}}{\sigma})] + (b_1 + b_2) [\mu \cdot \Phi(\frac{\mu\sqrt{m}}{\sigma}) + \frac{\sigma}{\sqrt{m}} \phi(\frac{\mu\sqrt{m}}{\sigma})] - b_2 \cdot \mu \quad (6.50)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{TL(m)}}{\partial m} &= -\frac{a_2}{2m} [1 - \Phi(\frac{\mu\sqrt{m}}{\sigma})] - \frac{a_2 \cdot \mu}{2\sigma \cdot m\sqrt{m}} \phi(\frac{\mu\sqrt{m}}{\sigma}) \\ &\quad - \frac{a_1}{2m} \phi(\frac{\mu\sqrt{m}}{\sigma}) + \frac{a_1 \cdot \mu}{2\sigma \cdot m\sqrt{m}} \phi(\frac{\mu\sqrt{m}}{\sigma}) - \frac{(b_1 + b_2) \cdot \sigma}{2m\sqrt{m}} \cdot \phi(\frac{\mu\sqrt{m}}{\sigma}) \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat een vermeerdering van de lengte van de beslissingsperiode een daling van de verwachte variabele transactiekosten (vijfde term rechts van het gelijkteken) tot gevolg heeft. Om te bewijzen dat ook de invloed van een vermeerdering van de lengte van de beslissingsperiode een daling van de verwachte vaste transactiekosten tot gevolg heeft (de eerst vier termen rechts van het gelijkteken), moet een onderscheid gemaakt worden tussen een verwachte kassaldooverandering per periode groter dan nul en kleiner dan nul. Is de verwachte kassaldooverandering per periode gelijk aan nul dan zijn ook de tweede en de vierde term

rechts van het gelijkteken gelijk aan nul, zodat alle overige termen negatief zijn.

Is de verwachte kassaldooverandering per periode groter dan nul dan is alleen de vierde term rechts van het gelijkteken groter dan nul. De som van de derde en vierde term is dan echter kleiner dan nul voor $m > 0$.
Stel:

$$g(m) := \Phi\left(\frac{\mu\sqrt{m}}{\sigma}\right) - \frac{\mu\sqrt{m}}{2\sigma} \phi\left(\frac{\mu\sqrt{m}}{\sigma}\right)$$

dan geldt:

$$\lim_{m \rightarrow 0} g(m) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial g(m)}{\partial m} = \left[\frac{\mu}{2\sigma\sqrt{m}} - \frac{\mu}{4\sigma\sqrt{m}} + \frac{\mu^3\sqrt{m}}{4\sigma^3} \right] \cdot \phi\left(\frac{\mu\sqrt{m}}{\sigma}\right) > 0$$

zodat een vermeerdering van de lengte van de beslissingsperiode tot lagere verwachte kosten per tijdsperiode leidt.

Is de verwachte kassaldooverandering per periode kleiner dan nul dan is de tweede term rechts van het gelijkteken positief, overeenkomstig het voorafgaande kan nu bewezen worden dat de som van de eerste en de tweede term negatief is.

Een vermeerdering van de lengte van de beslissingsperiode heeft dus zowel een daling van de verwachte vaste als van de verwachte variabele transactiekosten tot gevolg.

Bijlage F Bepaling van de optimale beleidsparameters bij continue controle

Evenals in hoofdstuk 7 zal voor de bepaling van de optimale beleidsparameters bij een verwachte kassaldooverandering per periode gelijk aan nul, een onderscheid gemaakt worden tussen de drie volgende mogelijkheden:

$$1) \quad d_c < 0 \leq D_c \leq U_c < u_c$$

$$2) \quad d_c \leq D_c < 0 < U_c \leq u_c$$

$$3) \quad d_c < D_c \leq U_c \leq 0 < u_c$$

In deze bijlage worden de optimale beleidsparameters bepaald uitgaande van de eerste mogelijkheid en worden alleen de resultaten vermeld die men krijgt als men uitgaat van de derde mogelijkheid.

F.1 De optimale beleidsparameters indien: $d_c < 0 \leq D_c \leq U_c < u_c$

Zoals in hoofdstuk 7 is aangetoond kunnen de optimale beleidsparameters indien hiervoor geldt dat $d_c < 0 \leq D_c \leq U_c < u_c$ bepaald worden uit:

minimaliseer: γ

onder de voorwaarden:

$$\gamma^2 \geq h \cdot \sigma^2(b_2 - W'(0)) \quad (7.12)$$

$$b_2 - W'(0) \geq 0 \quad (7.13)$$

$$\gamma^2 \geq -h \cdot \sigma^2(b_1 + W'(0)) \quad (7.16)$$

$$b_1 + W'(0) \leq 0 \quad (7.17)$$

$$W(U_{c2}) - W(U_{c1}) > a_2 + (U_{c2} - U_{c1}) \cdot b_2 \quad (7.19)$$

$$W(D_{c3}) - W(D_{c1}) > a_1 + (D_{c1} - D_{c3}) \cdot b_1 \quad (7.20)$$

met:

$$U_{c1} = \gamma/h - (1/h)[\gamma^2 - h \cdot \sigma^2(b_2 - W'(0))]^{1/2} \quad (7.10)$$

$$U_{c2} = \gamma/h + (1/h)[\gamma^2 - h \cdot \sigma^2(b_2 - W'(0))]^{1/2} \quad (7.11)$$

$$D_{c1} = \gamma/h - (1/h)[\gamma^2 + h \cdot \sigma^2(b_1 + W'(0))]^{1/2} \quad (7.15)$$

$$D_{c3} = -\gamma/s - (1/s)[\gamma^2 - s \cdot \sigma^2(b_1 + W'(0))]^{1/2} \quad (7.18)$$

Substitutie van U_{c1} en U_{c2} in (7.19) geeft:

$$\gamma^2 > h \cdot \sigma^2(b_2 - W'(0)) + (3h^2 \sigma^2 a_2 / 4)^{2/3} \quad (F.1)$$

Substitutie van D_{c1} en D_{c3} in (7.20) geeft uiteindelijk:

$$\begin{aligned} & -a_1 - (b_1 + W'(0))(\gamma/h + \gamma/s) + \frac{2\gamma^2}{3\sigma^2} (1/s^2 - 1/h^2) \\ & + \frac{2}{3s^2\sigma^2} [\gamma^2 - s \cdot \sigma^2(b_1 + W'(0))]^{3/2} + \frac{2}{3h^2\sigma^2} [\gamma^2 + h \cdot \sigma^2(b_1 + W'(0))]^{3/2} > 0 \end{aligned} \quad (F.2)$$

Voor het bepalen van de optimale beleidsparameters moet nu $W'(0)$ zodanig worden gekozen dat γ geminimaliseerd wordt onder de voorwaarden (7.17), (F.1) en (F.2). Immers, indien aan voorwaarde (F.1) is voldaan, dan is ook aan voorwaarde (7.12) voldaan, omdat $a_2 > 0$. Is aan voorwaarde (7.12) voldaan dan is ook aan voorwaarde (7.16) voldaan omdat voor b_1 , $b_2 > 0$ geldt:

$$-h \sigma^2(b_1 + W'(0)) < h \sigma^2(b_2 - W'(0))$$

en is aan voorwaarde (7.17) voldaan, dan is ook aan voorwaarde (7.13) voldaan.

Voor $s < 3h$ wordt in bijlage G (blz. 233) bewezen, dat γ onder de voorwaarden (7.17), (F.1) en (F.2) minimaal is, als de maximaal mogelijke reductie van de potentiële kostenfunctie juist gelijk is aan de daarbij behorende totale transactiekosten.

De te kiezen $W'(0)$ en de optimale γ kunnen zodoende worden bepaald uit het stelsel dat ontstaat door de voorwaarden: (F.1) en (F.2) als gelijkheden te schrijven, indien zoals uit bijlage G volgt de probleemparemeters voldoen aan:

$$-\sigma^2 h(b_1 + b_2) > (3h^2 \sigma^2 a_2 / 4)^{2/3} - (3s^2 \sigma^2 a_1 / 4)^{2/3} \quad (7.21)$$

$$s < 3h$$

Gebruikmakend van de gevonden resultaten volgt uit (F.1):

$$W'(0) = b_2 - \frac{\gamma^2}{h\sigma^2} + \frac{(3h^2 \sigma^2 a_2 / 4)^{2/3}}{h\sigma^2} \quad (F.3)$$

en substitutie van (F.3) in (7.11), (7.10), (7.15) en (7.18) geeft:

$$u_c = \gamma/h + (1/h)(3h^2 \sigma^2 a_2 / 4)^{1/3} \quad (F.4)$$

$$U_c = \gamma/h - (1/h)(3h^2 \sigma^2 a_2 / 4)^{1/3} \quad (F.5)$$

$$D_c = \gamma/h - (1/h)[h\sigma^2(b_1 + b_2) + (3h^2 \sigma^2 a_2 / 4)^{2/3}]^{1/2} \quad (F.6)$$

$$d_c = -\gamma/s - (1/s)[\gamma^2(1+s/h) - s/h(3h^2 \sigma^2 a_2 / 4)^{2/3} - s \cdot \sigma^2(b_1 + b_2)]^{1/2} \quad (F.7)$$

met γ de oplossing van

$$c_0 + c_1 \gamma + c_2 (c_3 \gamma^2 - c_4)^{3/2} + c_5 \gamma^3 = 0 \quad (F.8)$$

waarin:

$$c_0 = 2s^2((3h^2\sigma^2a_2/4)^{2/3} + h\cdot\sigma^2(b_1+b_2))^{3/2} - 3\sigma^2s^2h^2a_1$$

$$c_1 = 3s(s+h)[(3h^2\sigma^2a_2/4)^{2/3} + (b_1+b_2)h\cdot\sigma^2]$$

$$c_2 = 2h^2$$

$$c_3 = 1 + s/h$$

$$c_4 = (s/h)(3h^2\sigma^2a_2/4)^{2/3} + s\cdot\sigma^2(b_1+b_2)$$

$$c_5 = s^2 + 3sh + 2h^2$$

We kunnen het verkregen resultaat als volgt samenvatten: is de verwachte kassaldooverandering gelijk aan nul en voldoen de parameters van het kas-beheersprobleem aan (7.21), dan zijn de optimale beleidsparameters te bepalen door middel van (F.4) t/m (F.7) en de daarbij behorende verwachte kosten per tijdseenheid uit (F.8).

Omdat we nu beschikken over de waarden van de optimale beleidsparameters, indien de beide terugkeerpunten aan dezelfde kant van het nul-saldo liggen, is het nu ook mogelijk resultaten te formuleren voor het geval waarbij de variabele transactiekosten gelijk aan nul zijn en dus de beide terugkeerpunten samenvallen: zijn er geen variabele transactiekosten en is bovendien voldaan aan $s^2a_1 \geq h^2a_2$ en $s < 3h$, dan geldt:

$$D_c = U_c = \gamma/h - (1/h)(3h^2\sigma^2a_2/4)^{1/3}$$

en worden u_c , d_c en γ gegeven door (F.4), (F.7) en (F.8).

F.2 De optimale beleidsparameters indien $d_c < D_c \leq U_c < 0 < u_c$

Indien de optimale beleidsparameters aan de voorwaarde $d_c < D_c \leq U_c < 0 < u_c$ voldoen, kunnen ze op eenzelfde wijze bepaald worden als in paragraaf 7.4 en onderdeel F.1 voor: $d_c < 0 \leq D_c \leq U_c < u_c$ beschreven is.

De verwachte kosten per periode bij een optimaal beleid en de daarbij

behorende $W'(0)$, volgen uit de bepaling van de minimale γ die aan de volgende voorwaarden voldoet:

$$W'(0) - b_2 > 0$$

$$\gamma^2 > s \cdot \sigma^2(b_1 + W'(0)) + (3s^2 \sigma^2 a_1 / 4)^{2/3}$$

$$(W'(0) - b_2)(\gamma/h + \gamma/s) + \frac{2\gamma^3}{3\sigma^2} (1/h^2 - 1/s^2)$$

$$+ \frac{2}{3h^2 \sigma^2} [\gamma^2 + h \cdot \sigma^2(W'(0) - b_2)]^{3/2}$$

Op een zelfde wijze als in bijlage G voor $d_c < 0 \leq D_c \leq U_c < u_c$ beschreven is, kan bewezen worden, dat indien de probleemparemeters voldoen aan:

$$(3h^2 \sigma^2 a_2 / 4)^{2/3} - (3s^2 \sigma^2 a_1 / 4)^{2/3} > s \cdot \sigma^2(b_1 + b_2) \quad (7.23)$$

$$h < 3s$$

dat dan geldt:

$$u_c = \gamma/h + (1/h)[(1+h/s)\gamma^2 - h/s(3s^2 \sigma^2 a_1 / 4)^{2/3} - h \sigma^2(b_1 + b_2)]^{1/2} \quad (F.9)$$

$$U_c = -\gamma/s + (1/s)[s \sigma^2(b_1 + b_2) + (3s^2 \sigma^2 a_1 / 4)^{2/3}]^{1/2} \quad (F.10)$$

$$D_c = -\gamma/s + (1/s)(3s^2 \sigma^2 a_1 / 4)^{1/3} \quad (F.11)$$

$$d_c = -\gamma/s - (1/s)(3s^2 \sigma^2 a_1 / 4)^{1/3} \quad (F.12)$$

met γ de oplossing van:

$$p_0 - p_1 \gamma + p_2 (p_3 \gamma^2 - p_4)^{3/2} + p_5 \gamma^3 = 0 \quad (F.13)$$

waarin:

$$p_0 = 2h^2[\sigma^2 s(b_1+b_2) + (3s^2\sigma^2 a_1/4)^{2/3}]^{3/2} - 3\sigma^2 h^2 s^2 a_2$$

$$p_1 = 3h(h+s)[(b_1+b_2)\sigma^2 s + (3s^2\sigma^2 a_1/4)^{2/3}]$$

$$p_2 = 2s^2$$

$$p_3 = (1+h/s)$$

$$p_4 = h\sigma^2(b_1+b_2) + (h/s)(3s^2\sigma^2 a_1/4)^{2/3}$$

$$p_5 = h^2 + 3hs + 2s^2$$

We kunnen dit resultaat als volgt samenvatten: is de verwachte kassaldo-verandering gelijk aan nul en voldoen de probleemparameters aan (7.23) dan zijn de optimale beleidsparameters te bepalen door middel van (F.9) t/m (F.12) en de daarbij behorende verwachte kosten per tijdseenheid uit (F.13).

Zijn er geen variabele transactiekosten en is bovendien voldaan aan $h^2 a_2 > s^2 a_1$ en $h < 3s$ dan geldt

$$D_c = U_c = -\gamma/s + (1/s)(3s^2\sigma^2 a_1/4)^{1/3}$$

en worden u_c , d_c en γ gegeven door (F.9), (F.12) en (F.13).

Bijlage G Bepaling van de minimaal verwachte kosten per tijdseenheid

Voor het bepalen van de minimaal verwacht kosten per tijdseenheid, zodat aan de voorwaarden (F.1), (F.2) en (7.17) wordt voldaan, definiëren we eerst:

$$g(W'(0), \gamma) := \gamma^2 - h \sigma^2 (b_2 - W'(0)) - (3h^2 \sigma^2 a_2 / 4) \quad (G.1)$$

$$h(W'(0), \gamma) := -(b_1 + W'(0))(\gamma/h + \gamma/s) + \frac{2}{3\sigma^2} (\gamma^3/s^2 - \gamma^3/h^2) \\ + \frac{2}{3\sigma^2 s^2} [\gamma^2 - s \sigma^2 (b_1 + W'(0))]^{3/2} + \frac{2}{3\sigma^2 h^2} [\gamma^2 + h s^2 (b_1 + W'(0))]^{3/2} - a_1 \quad (G.2)$$

Aan de voorwaarden (F.1), (F.2) en (7.17) is voldaan indien geldt:

$$g(W'(0), \gamma) \geq 0 \quad (F.1)$$

$$h(W'(0), \gamma) \geq 0 \quad (F.2)$$

$$b_1 + W'(0) \geq 0 \quad (7.17)$$

We zullen bewijzen, dat voor de functie $\gamma = k_1(W'(0))$, die de oplossing is van $g(W'(0), \gamma) = 0$, geldt dat γ een dalende functie is van $W'(0)$, d.w.z.:

$$\frac{d k_1(W'(0))}{d W'(0)} < 0 \quad (G.3)$$

Ook zullen we bewijzen dat de oplossing van $h(W'(0), \gamma) = 0$: $\gamma = k_2(V_x(0))$ de volgende eigenschap heeft:

$$\frac{d k_2(W'(0))}{d W'(0)} > 0, \text{ indien } s < 3h \text{ en } \frac{-\gamma^2}{h \sigma^2} < b_1 + W'(0) \leq 0 \quad (G.4)$$

Voor $s < 3h$ geldt dus dat de functie $\gamma = k_2(W'(0))$ op het in (G.4) genoemde interval, een stijgende functie is van $W'(0)$.

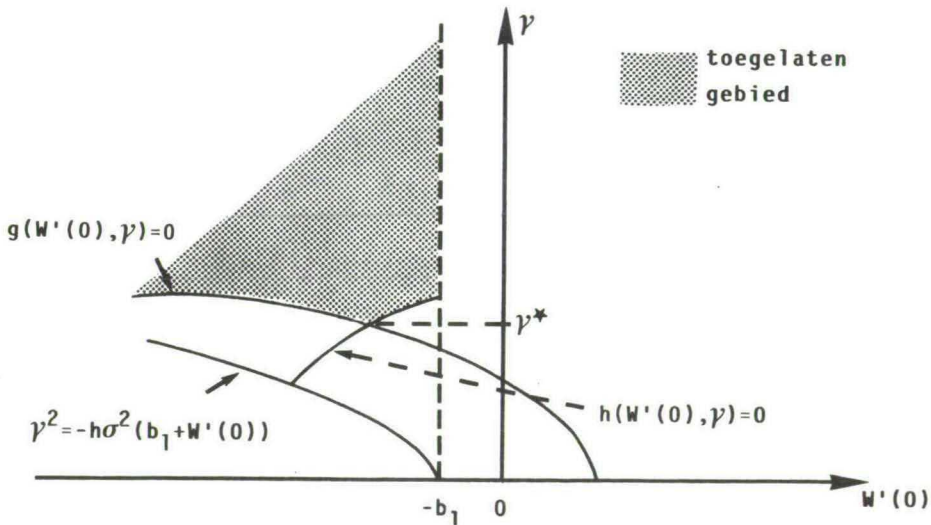
Omdat de eigenschappen (G.3) en (G.4) ook gelden voor $b_1 + W'(0) > 0$, zijn, zoals ook uit figuur G.1 blijkt, de minimale γ en de bijbehorende $W'(0)$ te bepalen uit:

$$g(W'(0), \gamma) = 0 \quad (G.5)$$

$$h(W'(0), \gamma) = 0 \quad (G.6)$$

indien de probleemparemeters voldoen aan:

$$-h \sigma^2 (b_1 + b_2) > (3h^2 \sigma^2 a_2 / 4)^{2/3} - (3s^2 \sigma^2 a_1 / 4)^{2/3} \quad (G.7)$$



Figuur G.1 Bepaling van minimale γ voor $s < 3h$ en $d_c < 0 \leq D_c \leq U_c < u_c$

Immers, omdat $k_1(W'(0))$ een dalende functie is van $W'(0)$ en omdat $k_2(W'(0))$ een stijgende functie is van $W'(0)$ op het interval $(-\gamma^2/h\sigma^2 - b_1, -b_1]$, ligt de minimale γ die aan de voorwaarden (7.17), (F.1) en (F.2) voldoet op het snijpunt van (G.5) en (G.6), indien dit snijpunt links van $W'(0) = -b_1$ ligt.

Aan laatstgenoemde voorwaarde (5.11) wordt voldaan indien geldt:

$$k_2(-b_1) > k_1(-b_1)$$

omdat uit $\gamma = k_2(-b_1)$ volgt:

$$\gamma^2 = (3s^2\sigma^2a_1/4)^{2/3}$$

en omdat uit $\gamma = k_1(-b_1)$ volgt:

$$\gamma^2 = (3h^2\sigma^2a_2/4)^{2/3} + h\sigma^2(b_1+b_2)$$

wordt aan (7.17) voldaan indien:

$$(3s^2\sigma^2a_1/4)^{2/3} > (3h^2\sigma^2a_2/4)^{2/3} + h\sigma^2(b_1+b_2)$$

hetgeen ook te schrijven is als in (G.7). Omdat nu geldt:

$$V(U_2) - V(U_1) = a_2 + b_2(U_{c2} - U_{c1})$$

$$V(D_3) - V(D_1) = a_1 + b_1(D_{c1} - D_{c3})$$

kunnen de optimale controlegrenzen bepaald worden uit: $d_c = D_{c3}$ en $u_c = U_{c2}$.

Bewijs eigenschap (G.3)

Voor het bewijs van eigenschap (G.3) gaan we uit van $g(W'(0), \gamma) = 0$.

Hiervoor geldt:

$$\frac{\partial g(W'(0), \gamma)}{\partial W'(0)} \cdot d W'(0) + \frac{\partial g(W'(0), \gamma)}{\partial \gamma} \cdot d \gamma = 0$$

Voor elk punt $(W'(0), \gamma)$, waarvoor $\partial g(W'(0), \gamma)/\partial \gamma \neq 0$ is geldt dus:

$$\frac{d \gamma}{d W'(0)} = - \frac{\frac{\partial g(W'(0), \gamma)}{\partial W'(0)}}{\frac{\partial g(W'(0), \gamma)}{\partial \gamma}} \quad (G.8)$$

Omdat $\gamma = k_1(W'(0))$ de oplossing is van $g(W'(0)) = 0$ volgt (G.3) uit (G.1) en (G.8), immers substitutie geeft:

$$\frac{d k_1(W'(0))}{d W'(0)} = -\frac{h \sigma^2}{2\gamma} < 0$$

Bewijs eigenschap (G.4)

Voor het bewijs van eigenschap (G.4) gaan we uit van $h(W'(0), \gamma) = 0$. Hieruit volgt voor $\partial h(W'(0), \gamma) / \partial \gamma \neq 0$:

$$\frac{d \gamma}{d W'(0)} = -\frac{\frac{\partial h(W'(0), \gamma)}{\partial W'(0)}}{\frac{\partial h(W'(0), \gamma)}{\partial \gamma}}$$

Uit (G.2) volgt:

$$\frac{\partial h(W'(0), \gamma)}{\partial W'(0)} = -\frac{\gamma}{s} - \frac{\gamma}{s} - \frac{[\gamma^2 - s \sigma^2 (b_1 + W'(0))]^{1/2}}{s} + \frac{[\gamma^2 + h \sigma^2 (b_1 + W'(0))]^{1/2}}{h}$$

Omdat:

$$\gamma \geq [\gamma^2 + h \sigma^2 (b_1 + W'(0))]^{1/2}, \text{ indien } -\frac{\gamma^2}{h \sigma^2} < b_1 + W'(0) \leq 0$$

geldt:

$$\frac{\partial h(W'(0), \gamma)}{\partial W'(0)} < 0, \text{ indien } -\frac{\gamma^2}{h \sigma^2} < b_1 + W'(0) \leq 0 \quad (G.10)$$

Uit (G.2) volgt eveneens:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(\gamma, W'(0))}{\partial \gamma} &= -(b_1 + W'(0)) \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{s} \right) + \frac{2 \gamma^2}{\sigma^2} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{h^2} \right) \\ &+ \frac{2\gamma}{\sigma^2 s^2} [\gamma^2 - s^2 \sigma^2 (b_1 + W'(0))]^{1/2} + \frac{2\gamma}{\sigma^2 h^2} [\gamma^2 + h \sigma^2 (b_1 + W'(0))]^{1/2} \end{aligned} \quad (G.11)$$

We zullen bewijzen dat:

$$\frac{\partial h(\gamma, W'(0))}{\partial \gamma} > 0, \text{ indien } s < 3h, \text{ en } \frac{-\gamma^2}{h \sigma^2} < b_1 + W'(0) \leq 0 \quad (\text{G.12})$$

Omdat $\gamma = k_2(W'(0))$ de oplossing is van $h(W'(0), \gamma) = 0$ volgt uit (G.9) en (G.10) en (G.11) eigenschap (G.4).

Bewijs eigenschap (A.12)

Voor het bewijs van (G.12) stellen we:

$$s = \beta h, \text{ indien } \beta > 1 \quad (\text{G.13})$$

Immers, voor $0 < \beta \leq 1$ is altijd aan (G.12) voldaan, omdat voor $b_1 + W'(0) \leq 0$ geen termen rechts van het gelijktteken in (G.11) een negatieve waarde hebben.

Voorts stellen we

$$b_1 + W'(0) = -\frac{\alpha \gamma^2}{h \sigma^2} \quad (\text{G.14})$$

Uit (7.16), (7.17) en (F.1) volgt dan dat voor $a_2 > 0$ moet gelden:

$$0 \leq \alpha < 1 \quad (\text{G.15})$$

Uit (G.13) en (G.15) volgt nu:

$$\alpha \beta \geq 0 \quad (\text{G.16})$$

Gebruikmakend van (G.13) en (G.14) wordt (G.11):

$$\frac{\partial h(W'(0), \gamma)}{\partial \gamma} = \frac{\gamma^2}{\beta^2 h^2 \sigma^2} [\alpha \beta (1+\beta) + 2(1-\beta^2) + 2(1+\alpha\beta)^{1/2} + 2\beta^2(1-\alpha)^{1/2}]$$

Omdat zoals bewezen zal worden geldt

$$(1-\alpha)^{1/2} \geq 1 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2, \text{ indien } 0 \leq \alpha < 1 \quad (\text{G.17})$$

geldt:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \beta(1+\beta) + 2(1-\beta)^2 + 2(1+\alpha\beta)^{1/2} + 2\beta^2(1-\alpha)^{1/2} &\geq \\ \alpha \cdot \beta(1+\beta) + 2(1-\beta^2) + 2(1+\alpha\beta) + 2\beta^2(1 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2) &= \\ -\beta^2\alpha^2 + \alpha\beta + 2(1+\alpha\beta)^{1/2} + 2 & \end{aligned}$$

Omdat

$$-\beta^2\alpha^2 + \alpha\beta + 2(1+\alpha\beta)^{1/2} + 2 \geq -\beta^2\alpha^2 + \alpha\beta + 4$$

en omdat

$$-\beta^2\alpha^2 + \alpha\beta + 4 > 0, \text{ indien } 0 \leq \alpha\beta \leq 2,5615$$

geldt:

$$\frac{\partial h(W'(0), \gamma)}{\partial \gamma} > 0, \text{ indien } 0 \leq \alpha\beta \leq 2,5615$$

voor $\alpha\beta \geq 2,5615$ geldt $(1+\alpha\beta)^{1/2} > 1,8871$

en is:

$$-\beta^2\alpha^2 + \alpha\beta + 2(1+\alpha\beta)^{1/2} + 2 > -\beta^2\alpha^2 + \alpha\beta + 5,7742$$

$$-\beta^2\alpha^2 + \alpha\beta + 5,7742 > 0 \text{ indien } 0 \leq \alpha\beta \leq 2,9544$$

dus

$$-\beta^2\alpha^2 + \alpha\beta + 2(1+\alpha\beta)^{1/2} > 0, \text{ indien } 0 \leq \alpha\beta < 2,9544$$

Op dezelfde wijze als hiervoor gebruikt, kan bewezen worden dat geldt:

$$-\beta^2 \alpha^2 + \alpha\beta + 2(1+\alpha\beta)^{1/2} + s > 0, \text{ indien } 0 \leq \alpha\beta \leq 2.999.$$

Hieruit volgt:

$$\frac{\partial h(\gamma, W'(0))}{\partial \gamma} > 0, \text{ indien } 0 \leq \alpha\beta \leq 2.999.$$

Gebruikmakend van (G.13) en (G.15) volgt hieruit (G.12).

Bewijs eigenschap (G.17)

Voor $0 \leq \alpha < 1$ geldt:

$$1 - \alpha > 1 - \alpha - \frac{1}{2}\alpha^2(1-\alpha) - \frac{1}{4}\alpha^2(1-\alpha^2) \quad (\text{G.18})$$

Dit is te schrijven als:

$$1 - \alpha > (1 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\alpha^2)^2$$

Hieruit volgt, daar $1 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\alpha^2 > 0$, (G.17) onmiddellijk.

Bijlage H Eigenschappen van het deterministische probleem

In hoofdstuk 8 is voor de constructie van de benaderingsformules onder andere gebruik gemaakt van de volgende eigenschappen van het deterministische liquiditeitsprobleem met een continue kassaldoverandering van μ eenheden per tijdseenheid:

1. De verandering van de optimale beginvoorraad bij een verandering van de lengte van de beslissingsperiode met een tijdseenheid bedraagt indien $\mu > 0$: $\mu \cdot s / (h + s)$. De verandering in de voorraadkosten per tijdseenheid bedraagt dan: $0,5 \times \mu \cdot h \cdot s / (h + s)$.
2. Zijn er alleen proportionele kosten aan een transactie verbonden dan bedraagt de afstand tussen het onderste terugkeerpunt D' en het bovenste terugkeerpunt U' , indien $\mu > 0$ en $D' > 0$: $(b_1 + b_2) \cdot \mu / h$.

H.1 Bepaling optimale beginvoorraad

Voor een verwachte kassaldoverandering groter dan nul is op een zelfde wijze als in paragraaf 5.2, door gebruik te maken van figuur 5.1, af te leiden dat de voorraadkosten gedurende een beslissingsperiode van m tijdsperiodes, indien de beginvoorraad aan het begin van iedere beslissingsperiode θ_m bedraagt, gelijk aan:

$$\frac{\theta_m}{2} \cdot \frac{\theta_m}{\mu} \cdot h + \frac{(m \cdot \mu - \theta_m)}{2} \cdot \frac{(m \cdot \mu - \theta_m)}{\mu} \cdot s \quad (\text{H.1})$$

Door differentiatie van de voorraadkosten naar de beginvoorraad en het resultaat gelijk te stellen aan nul vindt men voor de optimale beginvoorraad:

$$\theta_m = m \cdot \mu \cdot s / (s + h) \quad (\text{H.2})$$

Hieruit volgt dan de reeds genoemde verandering van de optimale normvoorraad als de lengte van de beslissingsperiode met een periode vermeerderd wordt.

Substitutie van (H.2) in (H.1) geeft na deling door m de gemiddelde

voorraadkosten per tijdsperiode: $0,5 \times \mu \cdot h \cdot s \cdot m / (h+s)$. Hieruit volgt dat de marginale verandering per de gemiddelde kosten per tijdsperiode gelijk is aan $0,5 \times \mu \cdot h \cdot s / (h+s)$.

H.2 Bepaling afstand tussen de terugkeerpunten

Voor de bepaling van de afstand tussen de terugkeerpunten gaan we er vanuit dat geldt:

- a) de vraag naar kasgeld bedraagt μ eenheden per tijdseenheid ($\mu > 0$);
- b) is het kassaldo op het beslissingsmoment x en is dit hoger dan een bepaalde waarde $D' > 0$, dan is het mogelijk een bedrag: $v = x - U'$, met $U' > D'$, tijdelijk te beleggen tot het moment waarop het kassaldo het niveau D' bereikt. Hierna wordt het belegde bedrag met een continue snelheid μ weer in kasgeld omgezet.

Voor het bepalen van de optimale transactie-omvang moet de netto opbrengst van de $x - D'$ geldeenheden gemaximaliseerd worden. Deze netto opbrengst is gelijk aan:

$$R(v) = \frac{r \cdot v \cdot (U' - D')}{\mu} + \frac{r \cdot v^2}{2\mu} + \frac{c \cdot (U' - D')^2}{2\mu} - (b_1 + b_2) \cdot v \quad (H.3)$$

Hierin is de eerste term recht van het gelijkteken gelijk aan het produkt van de opbrengst van de belegde geldeenheden per tijdseenheid (r), het belegde bedrag (v) en de tijd gedurende welke dit bedrag volledig belegd is $(U' - D')/\mu$. De tweede term is de opbrengst die verkregen wordt over het belegde bedrag nadat het kassaldo niveau D' bereikt heeft. De derde term geeft de opbrengst over een saldo $U' - D'$ weer vanaf het beslissingsmoment tot het moment waarop het kassaldo niveau D' bereikt en de vierde term de kosten verbonden met de transacties. Na substitutie van $U' = x - v$ in (H.3), differentiatie van het resultaat na de transactie-omvang en dit gelijk gesteld aan nul vindt men gebruikmakend van $h = r - c$:

$$U' - D' = (b_1 + b_2) \cdot \mu / h$$

Bijlage I Waarden van de optimale beleidsparameters

$a_1 = a_2$	LP-methode				DP-methode			
	d	D	U	u	d	D	U	u
	$b_1 = b_2 = 0$				$b_1 = b_2 = 0$			
0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,00	1,00	1,00	1,00
0,1 μ h	0,8	1,0	1,0	1,2	0,65	1,01	1,01	1,38
μ h	0,0	1,4	1,4	2,8	-0,07	1,45	1,45	2,86
10 μ h	-2,0	3,6			-2,21	3,57	3,57	8,04
	$b_1 = b_2 = h$				$b_1 = b_2 = h$			
0	1,0	1,0			1,00	1,00	2,78	2,78
0,1 μ h	0,8	1,0			0,65	1,01	2,87	3,32
μ h	0,0	1,4			-0,07	1,45	3,45	4,86
10 μ h	-2,0	3,6			-2,19	3,56	5,56	10,04
	$b_1 = b_2 = 5h$				$b_1 = b_2 = 5h$			
0	1,0	1,0			1,00	1,00	10,78	10,78
0,1 μ h	0,8	1,0			0,73	1,00	10,86	11,34
μ h	0,0	1,4			-0,07	1,45	11,45	12,88
10 μ h	-2,0	3,6			-2,18	3,55	13,57	18,04
	$b_1 = b_2 = 10h$				$b_1 = b_2 = 10h$			
0	1,0	1,0			1,01	1,01	20,84	20,84
0,1 μ h	0,8	1,0			0,82	1,00	20,85	21,42
μ h	0,0	1,4			-0,07	1,45	21,45	22,89
10 μ h	-2,0	3,6			-2,00	3,39	23,54	28,07

Tabel I.1 Waarden van de optimale beleidsparameters in eenheden μ voor $\mu > 0$, $s = h$ en $\sigma = 0,5\mu$

$a_1 = a_2$	LP-methode				DP-Methode			
	d	D	U	u	d	D	U	u
	$b_1 = b_2 = 0$				$b_1 = b_2 = 0$			
0	1,4	1,4	1,4	1,4	1,34	1,34	1,34	1,34
0,1 μ h	1,2	1,4	1,4	1,6	1,07	1,34	1,34	1,65
μ h	0,8	1,6			0,60	1,70	1,70	3,22
10 μ h	-0,2	4,4			-0,31	4,30	4,30	8,81
	$b_1 = b_2 = h$				$b_1 = b_2 = h$			
0	1,4	1,4	3,0	3,0	1,33	1,33	3,02	3,02
0,1 μ h	1,2	1,4			1,07	1,34	3,11	3,56
μ h	0,8	1,6			0,60	1,69	3,80	5,22
10 μ h	-0,2	4,4			-0,31	4,30	6,28	10,81
	$b_1 = b_2 = 5h$				$b_1 = b_2 = 5h$			
0	1,4	1,4			1,33	1,33	11,01	11,01
0,1 μ h	1,2	1,4			1,08	1,34	11,11	11,56
μ h	0,8	1,6			0,61	1,67	11,80	13,23
10 μ h	-0,2	4,4			-0,29	4,27	14,32	18,81
	$b_1 = b_2 = 10$				$b_1 = b_2 = 10h$			
0	1,4	1,4			1,34	1,34	21,04	21,04
0,1 μ h	1,2	1,4			1,17	1,34	21,10	21,66
μ h	0,8	1,6			0,71	1,49	21,80	23,31
10 μ h	-0,2	4,4			-0,27	4,19	24,32	28,83

Tabel I.2 Waarden van de optimale beleidsparameters in eenheden μ voor $\mu > 0$, $s = 3h$ en $\sigma = 0,5\mu$

$a_1 = a_2$	LP-methode				DP-methode			
	d	D	U	u	d	D	U	u
	$b_1 = b_2 = 0$				$b_1 = b_2 = 0$			
0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,00	1,00	1,00	1,00
0,1 μ h	0,6	1,0	1,0	1,4	0,51	1,02	1,02	1,52
μ h	-0,2	1,4	1,4	2,8	-0,33	1,34	1,34	2,93
10 μ h	-2,4	3,4	3,4	7,8	-2,43	3,31	3,31	7,90
	$b_1 = b_2 = h$				$b_1 = b_2 = h$			
0	0,8	0,8	3,0	3,0	0,90	0,90	2,96	2,96
0,1 μ h	0,6	1,0	3,0	3,4	0,46	0,94	3,01	3,51
μ h	-0,2	1,4	3,4	4,8	-0,34	1,36	3,38	4,93
10 μ h	-2,4	3,4	5,4	9,8	-2,43	3,30	5,30	9,90
	$b_1 = b_2 = 5h$				$b_1 = b_2 = 5h$			
0	0,8	0,8			0,89	0,89	10,95	10,95
0,1 μ h	0,6	1,0			0,46	0,93	11,00	11,49
μ h	-0,2	1,4			-0,37	1,39	11,38	12,90
10 μ h	-2,4	3,4			-2,60	3,43	13,35	17,85
	$b_1 = b_2 = 10h$				$b_1 = b_2 = 10h$			
0	0,8	0,8			0,89	0,89	20,95	20,95
0,1 μ h	0,6	1,0			0,46	0,93	21,00	21,44
μ h	-0,2	1,4			-0,47	1,42	21,38	22,87
10 μ h	-2,4	3,4			-2,61	3,45	23,33	27,84

Tabel I.3 Waarden van de optimale beleidsparameters in eenheden μ voor $\mu > 0$, $s = h$ en $\sigma = \mu$

$a_1=a_2$	LP-methode				DP-methode			
	d	D	U	u	d	D	U	u
	$b_1 = b_2 = 0$				$b_1 = b_2 = 0$			
0	1,6	1,6	1,6	1,6	1,67	1,67	1,67	1,67
0,1 μ h	1,4	1,6	1,6	2,0	1,30	1,68	1,68	2,10
μ h	0,8	2,0	2,0	3,4	0,69	1,95	1,95	3,47
10 μ h	-0,4	4,2	4,2	8,8	-0,46	4,23	4,23	8,83
	$b_1 = b_2 = h$				$b_1 = b_2 = h$			
0	1,6	1,6	3,4	3,4	1,59	1,59	3,44	3,44
0,1 μ h	1,4	1,6	3,4	4,0	1,26	1,62	3,49	4,00
μ h	0,8	2,0	4,0	5,6	0,68	1,93	3,94	5,48
10 μ h	-0,4	4,2	6,2	10,8	-0,46	4,23	6,23	10,83
	$b_1 = b_2 = 5h$				$b_1 = b_2 = 5h$			
0	1,6	1,6			1,59	1,59	11,44	11,44
0,1 μ h	1,4	1,6			1,26	1,62	11,49	11,98
μ h	0,8	2,0			0,67	1,94	11,93	13,45
10 μ h	-0,4	4,2			-0,51	4,34	14,27	18,79
	$b_1 = b_2 = 10h$				$b_1 = b_2 = 10h$			
0	1,6	1,6			1,59	1,59	21,43	21,43
0,1 μ h	1,4	1,6			1,26	1,61	21,49	21,93
μ h	0,8	2,0			0,65	1,96	21,93	23,42
10 μ h	-0,4	4,2			-0,52	4,36	24,25	28,78

Tabel I.4 Waarden van de optimale beleidsparameters in eenheden μ voor $\mu > 0$, $s = 3h$ en $\sigma = \mu$

$a_1 = a_2$	LP-methode				DP-methode			
	d	D	U	u	d	D	U	u
	$b_1 = b_2 = 0$				$b_1 = b_2 = 0$			
0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,00	1,00	1,00	1,00
0,1 μ h	0,5	1,0	1,0	1,5	0,14	1,01	1,01	1,87
μ h	-1,5	1,0	1,0	3,5	-1,55	1,15	1,15	3,79
10 μ h	-5,0	2,5	2,5	9,0	-5,14	2,30	2,30	9,12
	$b_1 = b_2 = h$				$b_1 = b_2 = h$			
0	-0,5	-0,5	4,0	4,0	-0,27	-0,27	4,15	4,15
0,1 μ h	-0,5	0,0	4,0	4,5	-0,96	-0,23	4,14	4,88
μ h	-2,0	0,0	4,0	6,0	-2,28	0,11	4,12	6,48
10 μ h	-5,0	2,0	4,5	11,0	-5,39	1,81	4,61	11,33
	$b_1 = b_2 = 5h$				$b_1 = b_2 = 5h$			
0	-1,0	-1,0	12,5	12,5	-1,07	-1,07	12,71	12,71
0,1 μ h	-1,5	-1,0	12,5	13,0	-1,69	-1,02	12,69	13,43
μ h	-2,5	-0,5	12,5	14,5	-2,87	-0,62	12,59	14,94
10 μ h	-5,5	1,5	13,0	19,5	-5,69	1,32	12,84	19,57
	$b_1 = b_2 = 10h$				$b_1 = b_2 = 10h$			
0	-1,0	-1,0	23,0	23,0	-1,17	-1,17	22,76	22,76
0,1 μ h	-1,5	-1,0	23,0	23,5	-1,81	-1,11	22,74	23,48
μ h	-2,5	-0,5	22,5	25,0	-2,99	-0,69	22,64	24,98
10 μ h	-5,5	1,5	23,0	29,5	-5,76	1,28	22,86	29,53

Tabel I.5 Waarden van de optimale beleidsparameters in eenheden μ voor $\mu > 0$, $s = h$ en $\sigma = 3\mu$

$a_1=a_2$	LP-methode				DP-methode			
	d	D	U	u	d	D	U	u
	$b_1 = b_2 = 0$				$b_1 = b_2 = 0$			
0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,02	3,02	3,02	3,02
0,1 μ h	2,5	3,0	3,0	3,5	2,36	3,03	3,03	3,73
μ h	1,5	3,0	3,0	5,0	1,09	3,11	3,11	5,44
10 μ h	-1,0	4,5	4,5	11,0	-1,41	4,35	4,35	11,08
	$b_1 = b_2 = h$				$b_1 = b_2 = h$			
0	2,0	2,0	5,5	5,5	2,14	2,14	5,70	5,70
0,1 μ h	2,0	2,0	5,5	6,0	1,62	2,16	5,70	6,43
μ h	1,0	2,5	5,5	8,0	0,62	2,35	5,73	8,08
10 μ h	-1,5	4,0	6,5	13,0	-1,54	3,94	6,60	13,33
	$b_1 = b_2 = 5h$				$b_1 = b_2 = 5h$			
0	1,5	1,5	14,5	14,5	1,57	1,57	14,41	14,41
0,1 μ h	1,5	1,5	14,5	15,0	1,11	1,60	14,40	15,14
μ h	0,5	2,0	14,5	16,5	0,25	1,84	14,33	16,68
10 μ h	-1,5	3,5	15,0	21,5	-1,70	3,55	14,88	21,61
	$b_1 = b_2 = 10h$				$b_1 = b_2 = 10h$			
0	1,5	1,5	24,5	24,5	1,51	1,51	24,48	24,48
0,1 μ h	1,5	1,5	24,5	25,0	1,04	1,54	24,46	25,20
μ h	0,5	2,0	24,5	26,5	0,19	1,78	24,38	26,72
10 μ h	-1,5	3,5	25,0	31,5	-1,74	3,52	24,92	31,60

Tabel I.6 Waarden van de optimale beleidsparameters in eenheden μ voor $\mu > 0$, $s = 3h$ en $\sigma = 3\mu$

$a_1=a_2$	$s = h$				$s = 3h$			
	d	D	U	u	d	D	U	u
	$b_1 = b_2 = 0$				$b_1 = b_2 = 0$			
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,67	0,67	0,67	0,67
0,1σh	-0,50	0,00	0,00	0,50	0,30	0,67	0,67	1,09
σh	-1,42	0,00	0,00	1,42	-0,36	0,70	0,70	2,00
10σh	-3,44	0,00	0,00	3,44	-1,63	0,92	0,92	4,27
	$b_1 = b_2 = h$				$b_1 = b_2 = h$			
0	-0,70	-0,70	0,70	0,70	0,22	0,22	1,27	1,27
0,1σh	-1,09	-0,68	0,68	1,09	-0,06	0,23	1,25	1,65
σh	-1,83	-0,53	0,53	1,83	-0,58	0,33	1,18	2,44
10σh	-3,68	-0,29	0,29	3,68	-1,74	0,72	1,19	4,53
	$b_1 = b_2 = 5h$				$b_1 = b_2 = 5h$			
0	-1,82	-1,82	1,82	1,82	-0,39	-0,39	2,53	2,53
0,1σh	-2,17	-1,78	1,78	2,17	-0,62	-0,37	2,49	2,89
σh	-2,81	-1,56	1,56	2,81	-1,04	-0,25	2,32	3,57
10σh	-4,42	-1,08	1,08	4,42	-2,06	-0,23	2,05	5,39
	$b_1 = b_2 = 10h$				$b_1 = b_2 = 10h$			
0	-2,70	-2,70	2,70	2,70	-0,78	-0,78	3,57	3,57
0,1σh	-3,05	-2,65	2,65	3,05	-1,00	-0,77	3,53	3,92
σh	-3,66	-2,40	2,40	3,66	-1,40	-0,64	3,31	4,57
10σh	-5,15	-1,81	1,81	5,15	-2,36	-0,15	2,90	6,23

Tabel I.7 Waarden van de optimale beleidsparameters in eenheden σ voor $\mu = 0$

$a_1=a_2$	d	D	U	u	d	D	U	u
	$b_1 = b_2 = 0$				$b_1 = b_2 = h$			
0	-0,66	-0,66	-0,66	-0,66	-1,27	-1,27	-0,66	-0,66
-0,1 μ h	-0,94	-0,67	-0,67	-0,36	-1,54	-1,29	-0,67	-0,36
- μ h	-1,67	-0,87	-0,87	0,37	-2,31	-1,50	-0,87	-0,38
-10 μ h	-4,27	-1,67	-1,67	2,94	-4,94	-2,36	-1,67	2,93
	$b_1 = b_2 = 5h$				$b_1 = b_2 = 10h$			
0	-3,92	-3,92	-0,66	-0,66	-7,26	-7,26	-0,66	-0,66
-0,1 μ h	-4,22	-3,95	-0,67	-0,36	-7,55	-7,29	-0,67	-0,37
- μ h	-4,99	-4,16	-0,87	0,37	-8,32	-7,50	-0,87	0,37
-10 μ h	-7,60	-4,99	-1,66	2,88	-10,93	-8,35	-1,67	2,93

Tabel I.8 Waarden van de optimale beleidsparameters in eenheden μ voor $\mu < 0$, $s = 3h$ en $\sigma = 0,5\mu$

$a_1=a_2$	d	D	U	u	d	D	U	u
	$b_1 = b_2 = 0$				$b_1 = b_2 = h$			
0	-0,33	-0,33	-0,33	-0,33	-1,24	-1,24	-0,21	-0,21
-0,1 μ h	-0,72	-0,34	-0,34	-0,08	-1,56	-1,26	-0,24	0,16
- μ h	-1,58	-0,53	-0,53	0,91	-2,30	-1,38	-0,48	0,94
-10 μ h	-4,12	-1,40	-1,40	3,28				
	$b_1 = b_2 = 5h$				$b_1 = b_2 = 10h$			
0	-3,91	-3,91	-0,18	-0,18	-7,24	-7,24	-0,18	-0,18
-0,1 μ h	-4,21	-3,92	-0,21	0,19	-7,54	-7,25	-0,21	0,19
- μ h	-4,95	-4,03	-0,46	0,95	-8,28	-7,36	-0,46	0,95
-10 μ h	-7,44	-4,72	-1,40	3,30	-10,78	-8,05	-1,40	3,30

Tabel I.9 Waarden van de optimale beleidsparameters in eenheden μ voor $\mu < 0$, $s = 3h$ en $\sigma = -\mu$

$a_1=a_2$	d	D	U	u	d	D	U	u
	$b_1 = b_2 = 0$				$b_1 = b_2 = h$			
0	1,02	1,02	1,02	1,02	-0,82	-0,82	2,13	2,13
-0,1 μ h	0,35	1,02	1,02	1,73	-1,32	-0,82	2,11	2,77
- μ h	-1,02	0,95	0,95	3,27	-2,38	-0,81	1,91	4,10
-10 μ h	-4,38	0,44	0,44	7,18	-5,27	-0,83	0,95	7,57
	$b_1 = b_2 = 5h$				$b_1 = b_2 = 10h$			
0	-4,33	-4,33	3,53	3,53	-7,82	-7,82	4,10	4,10
-0,1 μ h	-4,74	-4,32	3,50	4,12	-8,23	-7,81	4,06	4,68
- μ h	-5,63	-4,28	3,20	5,29	-9,10	-7,75	3,74	5,82
-10 μ h	-8,24	-4,07	1,86	8,35	-11,68	-7,51	2,28	8,73

Tabel I.10 Waarden van de optimale beleidsparameters in eenheden μ voor $\mu < 0$, $s = 3h$ en $\sigma = 3\mu$

Bijlage II Invloed stopcriterium op waarden beleidsparameters

ϵ	n	d	D	U	u
$10^{-1}\mu$	17	$1,0759\mu$	$1,3422\mu$	$11,0924\mu$	$11,5403\mu$
$10^{-2}\mu$	19	$1,0763\mu$	$1,3421\mu$	$11,1065\mu$	$11,5593\mu$
$10^{-3}\mu$	21	$1,0766\mu$	$1,3421\mu$	$11,1074\mu$	$11,5605\mu$
$10^{-4}\mu$	22	$1,0768\mu$	$1,3421\mu$	$11,1073\mu$	$11,5605\mu$

Tabel II.1 Invloed stopcriterium voor $s = 3h$, $a_1 = a_2 = 0,1\mu h$,
 $b_1 = b_2 = 5h$ en $\sigma = 0,5\mu$

ϵ	n	d	D	U	u
$10^{-1}\mu$	7	$-0,3401\mu$	$1,3600\mu$	$3,3213\mu$	$4,8399\mu$
$10^{-2}\mu$	11	$-0,3388\mu$	$1,3642\mu$	$3,3815\mu$	$4,9275\mu$
$10^{-3}\mu$	13	$-0,3388\mu$	$1,3643\mu$	$3,3835\mu$	$4,9311\mu$
$10^{-4}\mu$	17	$-0,3389\mu$	$1,3644\mu$	$3,3840\mu$	$4,9320\mu$

Tabel II.2 Invloed stopcriterium voor $s = h$, $a_1 = a_2 = \mu h$, $b_1 = b_2 = h$
en $\sigma = \mu$.

ϵ	n	d	D	U	u
$10^{-1}\mu$	5	$-1,4136\mu$	$4,3176\mu$	$4,3176\mu$	$11,0335\mu$
$10^{-2}\mu$	8	$-1,4054\mu$	$4,3484\mu$	$4,3484\mu$	$11,0788\mu$
$10^{-3}\mu$	11	$-1,4044\mu$	$4,3521\mu$	$4,3521\mu$	$11,0843\mu$
$10^{-4}\mu$	14	$-1,4043\mu$	$4,3526\mu$	$4,3526\mu$	$11,0850\mu$

Tabel II.3 Invloed stopcriterium voor $s = 3h$, $a_1 = a_2 = 10\mu h$,
 $b_1 = b_2 = 0$ en $\sigma = 3\mu$

Bijlage III Invloed van discretisering op de verwachte kosten per perio-
de

s	$a_1=a_2$	$b_1=b_2$	z_1	$C(z_1)$	z_2	$C(z_2)$	$\Delta C(z)$
h	0	0	0,2 μ	0,396 μ h	0,005 μ	0,399 μ h	0,003 μ h
3h	0	0	0,2 μ	0,636 μ h	0,005 μ	0,635 μ h	-0,001 μ h
h	10 μ h	10h	0,2 μ	13,186 μ h	0,100 μ	13,190 μ h	0,004 μ h
3h	10 μ h	10h	0,2 μ	13,949 μ h	0,100 μ	13,950 μ h	0,001 μ h

Tabel III.1 Invloed van discretisering voor $\sigma = 0,5\mu$

s	$a_1=a_2$	$b_1=b_2$	z_1	$C(z_1)$	z_2	$C(z_2)$	$\Delta C(z)$
h	0	0	0,2 μ	0,796 μ h	0,01 μ	0,798 μ h	0,002 μ h
3h	0	0	0,2 μ	1,271 μ h	0,01 μ	1,270 μ h	-0,001 μ h
h	μ h	5h	0,2 μ	6,354 μ h	0,10 μ	6,352 μ h	-0,002 μ h
3h	μ h	5h	0,2 μ	6,906 μ h	0,10 μ	6,900 μ h	-0,006 μ h

Tabel III.2 Invloed van discretisering voor $\sigma = \mu$

s	$a_1=a_2$	$b_1=b_2$	z_1	$C(z_1)$	z_2	$C(z_2)$	$\Delta C(z)$
h	0	0	0,5 μ	2,388 μ h	0,03 μ	2,393 μ h	0,005 μ h
3h	0	0	0,5 μ	3,804 μ h	0,03 μ	3,811 μ h	0,007 μ h
h	0,1 μ h	0	0,5 μ	2,474 μ h	0,20 μ	2,459 μ h	-0,015 μ h
3h	0,1 μ h	0	0,5 μ	3,892 μ h	0,20 μ	3,866 μ h	-0,026 μ h

Tabel III.3 Invloed van discretisering voor $\sigma = 3\mu$

Bijlage IV Kans op een transactie en verwachte kosten per periode bij een optimaal beleid

$a_1 = a_2$	$P[v > 0]$	$P[v < 0]$	C_V	C_T	C
$b_1 = b_2 = 0$					
0	0,964	0,014	0,396	0,000	0,396
0,1 μ h	0,920	0,004	0,398	0,092	0,490
μ h	0,470	<	0,600	0,470	1,070
10 μ h	0,158	<	1,604	1,582	3,186
$b_1 = b_2 = h$					
0	0,963	<	0,397	1,000	1,397
0,1 μ h	0,919	<	0,399	1,092	1,491
μ h	0,470	<	0,600	1,470	2,070
10 μ h	0,158	<	1,604	2,582	4,186
$b_1 = b_2 = 5h$					
0	0,963	<	0,397	5,000	5,397
0,1 μ h	0,919	<	0,399	5,092	5,491
μ h	0,470	<	0,600	5,470	6,070
10 μ h	0,158	<	1,604	6,582	8,186
$b_1 = b_2 = 10h$					
0	0,963	<	0,397	10,000	10,397
0,1 μ h	0,919	<	0,399	10,092	10,491
μ h	0,470	<	0,600	10,470	11,070
10 μ h	0,158	<	1,604	11,582	13,186

Tabel IV.1 Kans op een transactie ($< : < 0,001$) en verwachte kosten per periode in eenheden μ h bij een optimaal beleid voor $\mu > 0$, $s = h$ en $\sigma = 0,5\mu$

$a_1=a_2$	$P[v>0]$	$P[v<0]$	C_V	C_T	C
$b_1 = b_2 = 0$					
0	0,964	0,014	0,636	0,000	0,636
0,1 μ h	0,920	0,005	0,638	0,092	0,730
μ h	0,673	<	0,754	0,673	1,427
10 μ h	0,188	<	2,070	1,879	3,949
$b_1 = b_2 = h$					
0	0,963	<	0,638	1,000	1,638
0,1 μ h	0,919	<	0,639	1,092	1,731
μ h	0,673	<	0,754	1,673	2,427
10 μ h	0,188	<	2,070	2,879	4,949
$b_1 = b_2 = 5h$					
0	0,963	<	0,638	5,000	5,638
0,1 μ h	0,919	<	0,639	5,092	5,731
μ h	0,673	<	0,754	5,673	6,427
10 μ h	0,188	<	2,070	6,879	8,949
$b_1 = b_2 = 10h$					
0	0,963	<	0,638	10,000	10,638
0,1 μ h	0,919	<	0,639	10,092	10,731
μ h	0,673	<	0,754	10,673	11,427
10 μ h	0,188	<	2,070	11,879	13,949

Tabel IV.2 Kans op een transactie ($< : < 0,001$) en verwachte kosten per periode in eenheden μ h bij een optimaal beleid voor $\mu > 0$, $s = 3h$ en $\sigma = 0,5\mu$

$a_1=a_2$	$P[v>0]$	$P[v<0]$	C_V	C_T	C
$b_1 = b_2 = 0$					
0	0,816	0,136	0,796	0,000	0,796
0,1 μ h	0,696	0,066	0,803	0,076	0,897
μ h	0,395	0,006	0,948	0,401	1,349
10 μ h	0,148	<	1,824	1,476	3,300
$b_1 = b_2 = h$					
0	0,775	0,002	0,839	1,002	1,841
0,1 μ h	0,662	0,001	0,842	1,068	1,901
μ h	0,390	<	0,962	1,391	2,354
10 μ h	0,148	<	1,824	2,476	4,300
$b_1 = b_2 = 5h$					
0	0,775	<	0,841	5,000	5,841
0,1 μ h	0,662	<	0,844	5,066	5,910
μ h	0,390	<	0,964	5,390	6,354
10 μ h	0,148	<	1,824	6,476	8,300
$b_1 = b_2 = 10h$					
0	0,775	<	0,841	10,000	10,841
0,1 μ h	0,662	<	0,844	10,066	10,910
μ h	0,390	<	0,964	10,390	11,354
10 μ h	0,148	<	1,824	11,476	13,300

Tabel IV.3 Kans op een transactie ($< : < 0,001$) en verwachte kosten per periode in eenheden μ h bij optimaal beleid voor $\mu > 0$, $s = h$ en $\sigma = \mu$

$a_1 = a_2$	$P[v > 0]$	$P[v < 0]$	C_V	C_T	C
$b_1 = b_2 = 0$					
0	0,816	0,136	1,271	0,000	1,271
0,1 μ h	0,754	0,069	1,276	0,082	1,358
μ h	0,468	0,007	1,424	0,475	1,899
10 μ h	0,179	<	2,429	1,794	4,223
$b_1 = b_2 = h$					
0	0,776	0,005	1,316	1,005	2,321
0,1 μ h	0,719	0,001	1,320	1,075	2,395
μ h	0,461	<	1,444	1,462	2,906
10 μ h	0,179	<	2,429	2,794	5,223
$b_1 = b_2 = 5h$					
0	0,774	<	1,322	5,000	6,322
0,1 μ h	0,718	<	1,323	5,072	6,395
μ h	0,461	<	1,444	5,462	6,906
10 μ h	0,179	<	2,429	6,794	9,223
$b_1 = b_2 = 10h$					
0	0,774	<	1,322	10,000	11,321
0,1 μ h	0,718	<	1,323	10,072	11,395
μ h	0,461	<	1,444	10,462	11,906
10 μ h	0,179	<	2,429	11,794	14,223

Tabel IV.4 Kans op een transactie ($< : < 0,001$) en verwachte kosten per periode in eenheden μ h bij een optimaal beleid voor $\mu > 0$, $s = 3h$ en $\sigma = \mu$

$a_1 = a_2$	$P[v > 0]$	$P[v < 0]$	C_V	C_T	C
$b_1 = b_2 = 0$					
0	0,599	0,338	2,388	0,000	2,388
0,1 μ h	0,534	0,280	2,392	0,081	2,473
μ h	0,308	0,112	2,559	0,421	2,980
10 μ h	0,128	0,018	3,544	1,365	4,909
$b_1 = b_2 = h$					
0	0,439	0,104	2,753	1,406	4,159
0,1 μ h	0,396	0,094	2,713	1,496	4,209
μ h	0,270	0,046	2,874	1,662	4,536
10 μ h	0,117	0,010	3,686	2,444	6,130
$b_1 = b_2 = 5h$					
0	0,373	0,012	3,523	5,230	8,753
0,1 μ h	0,330	0,009	3,533	5,256	8,789
μ h	0,235	0,005	3,600	5,441	9,041
10 μ h	0,109	0,001	4,184	6,210	10,394
$b_1 = b_2 = 10h$					
0	0,336	0,001	3,795	10,043	13,838
0,1 μ h	0,324	0,001	3,798	10,074	13,872
μ h	0,231	<	3,846	10,271	14,117
10 μ h	0,108	<	4,332	11,105	15,437

Tabel IV.5 Kans op een transactie ($< : < 0,001$) en verwachte kosten per periode in eenheden μ h bij een optimaal beleid voor $\mu > 0$, $s = h$ en $\sigma = 3\mu$

$a_1=a_2$	$P[v>0]$	$P[v<0]$	C_V	C_T	C
$b_1 = b_2 = 0$					
0	0,599	0,338	3,804	0,000	3,804
0,1 μ h	0,534	0,280	3,811	0,081	3,892
μ h	0,399	0,150	3,917	0,549	4,466
10 μ h	0,152	0,022	5,113	1,743	6,856
$b_1 = b_2 = h$					
0	0,462	0,136	4,167	1,535	5,702
0,1 μ h	0,460	0,109	4,181	1,578	5,759
μ h	0,313	0,051	4,339	1,805	6,144
10 μ h	0,141	0,012	5,399	2,721	8,120
$b_1 = b_2 = 5h$					
0	0,374	0,013	5,192	5,258	10,450
0,1 μ h	0,374	0,011	5,198	5,291	10,489
μ h	0,263	0,006	5,268	5,501	10,769
10 μ h	0,140	0,001	5,899	6,534	12,433
$b_1 = b_2 = 10h$					
0	0,366	0,001	5,498	10,054	15,552
0,1 μ h	0,366	0,001	5,499	10,089	15,588
μ h	0,257	0,001	5,548	10,315	15,863
10 μ h	0,138	<	6,074	11,408	17,482

Tabel IV.6 Kans op een transactie ($< : < 0,001$) en verwachte kosten per periode in eenheden μ h bij een optimaal beleid voor $\mu > 0$, $s = 3h$ en $\sigma = 3\mu$

$a_1=a_2$	$P[v>0]$	$P[v<0]$	C_V	C_T	C
$b_1 = b_2 = 0$					
0	0,460	0,460	0,796	0,000	0,796
$0,1\sigma h$	0,311	0,311	0,807	0,062	0,869
σh	0,109	0,109	0,970	0,218	1,188
$10\sigma h$	0,030	0,030	1,515	0,590	2,105
$b_1 = b_2 = h$					
0	0,231	0,231	0,960	0,361	1,321
$0,1\sigma h$	0,175	0,175	0,933	0,427	1,360
σh	0,082	0,082	1,093	0,476	1,569
$10\sigma h$	0,027	0,027	1,577	0,758	2,335
$b_1 = b_2 = 5h$					
0	0,133	0,133	1,349	1,047	2,396
$0,1\sigma h$	0,090	0,090	1,393	1,027	2,420
σh	0,051	0,051	1,483	1,060	2,543
$10\sigma h$	0,020	0,020	1,865	1,210	3,075
$b_1 = b_2 = 10h$					
0	0,094	0,094	1,802	1,475	3,277
$0,1\sigma h$	0,068	0,068	1,755	1,538	3,293
σh	0,039	0,039	1,841	1,543	3,384
$10\sigma h$	0,016	0,016	2,197	1,605	3,802

Tabel IV.7 Kans op een transactie en verwachte kosten per periode in eenheden σh bij een optimaal beleid voor $\mu = 0$ en $s = h$

$a_1 = a_2$	$P[v > 0]$	$P[v < 0]$	C_V	C_T	C
$b_1 = b_2 = 0$					
0	0,460	0,460	1,277	0,000	1,277
0,1σh	0,372	0,320	1,279	0,069	1,348
σh	0,132	0,132	1,474	0,264	1,738
10σh	0,042	0,035	2,151	0,768	2,919
$b_1 = b_2 = h$					
0	0,293	0,293	1,387	0,461	1,848
0,1σh	0,230	0,195	1,419	0,479	1,898
σh	0,109	0,098	1,595	0,574	2,169
10σh	0,036	0,029	2,284	0,901	3,185
$b_1 = b_2 = 5h$					
0	0,153	0,153	1,911	1,198	3,109
0,1σh	0,129	0,109	1,894	1,244	3,138
σh	0,076	0,060	2,041	1,261	3,302
10σh	0,037	0,022	2,576	1,479	4,055
$b_1 = b_2 = 10h$					
0	0,114	0,114	2,355	1,793	4,148
0,1σh	0,093	0,078	2,400	1,771	4,171
σh	0,057	0,045	2,481	1,841	4,295
10σh	0,026	0,019	2,934	1,953	4,887

Tabel IV.8 Kans op een transactie en verwachte kosten per periode in eenheden σh bij een optimaal beleid voor $\mu = 0$ en $s = 3h$

Bijlage V Resultaten met de voorraadtheoretische benadering

$a_1=a_2$	$s = h$			$s = 3h$		
	d_v	D_v	C_v	d_v	D_v	C_v
	$\sigma = 0,5\mu$			$\sigma = 0,5\mu$		
0	1,00	1,00	0,397	1,34	1,34	0,638
0,1 μ h	0,62	1,00	0,492	1,11	1,34	0,735
μ h	-0,41	1,00	1,167	0,58	1,34	1,452
10 μ h	-3,47	1,00	3,994	-0,45	4,02	3,968
	$\sigma = \mu$			$\sigma = \mu$		
0	1,00	1,00	0,842	1,67	1,67	1,322
0,1 μ h	0,91	1,00	0,919	1,67	1,67	1,399
μ h	-0,38	1,00	1,382	0,86	1,67	1,939
10 μ h	-3,47	1,00	3,903	-0,46	4,01	4,228
	$\sigma = 3\mu$			$\sigma = 3\mu$		
0	1,00	1,00	4,245	3,02	3,02	5,878
0,1 μ h	1,00	1,00	4,282	3,02	3,02	5,915
μ h	0,59	1,00	4,556	2,92	3,02	6,244
10 μ h	-3,47	1,00	5,576	0,46	4,93	7,899

Tabel V.1 Beleidsparameters en eenheden μ en verwachte kosten per periode in eenheden μ h bij toepassing van de voorraadtheoretische benadering voor $\mu > 0$ en $b_1 = b_2 = 0$

$a_1 = a_2$	$s = h$			$s = 3h$		
	$\sigma = 0,5\mu$	$\sigma = \mu$	$\sigma = 3\mu$	$\sigma = 0,5\mu$	$\sigma = \mu$	$\sigma = 3\mu$
	$b_1 = b_2 = 0$			$b_1 = b_2 = 0$		
0	0,3	5,8	77,8	0,3	4,0	54,5
0,1 μ h	0,4	4,6	73,2	0,7	3,0	53,2
μ h	9,1	2,4	52,9	1,7	2,1	40,4
10 μ h	25,4	18,3	13,6	0,5	0,1	15,2
	$b_1 = b_2 = h$			$b_1 = b_2 = h$		
0	0,0	0,1	26,1	0,0	0,0	20,6
0,1 μ h	0,1	0,5	25,5	0,2	0,2	20,5
μ h	4,7	1,2	22,5	1,0	1,1	17,9
10 μ h	19,3	14,0	7,3	0,4	0,3	9,6
	$b_1 = b_2 = 5h$			$b_1 = b_2 = 5h$		
0	0,0	0,0	5,6	0,0	0,0	4,1
0,1 μ h	0,0	0,2	5,6	0,1	0,0	4,1
μ h	1,6	0,4	5,7	0,4	0,5	4,4
10 μ h	9,9	7,3	1,8	0,2	0,1	3,7
	$b_1 = b_2 = 10h$			$b_1 = b_2 = 10h$		
0	0,0	0,0	2,9	0,0	0,0	2,1
0,1 μ h	0,0	0,1	3,0	0,0	0,0	2,1
μ h	0,9	0,2	3,1	0,2	0,3	2,4
10 μ h	5,1	4,5	0,9	0,1	0,0	2,4

Tabel V.2 Procentuele afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode bij toepassing van de voorraadtheoretische benadering voor $\mu > 0$

Bijlage VI Resultaten met de lineaire beslissingsregel

$b_1=b_2$	$s = h$			$s = 3h$		
	κ	θ	C_L	κ	θ	C_L
	$\mu = 0, \sigma = 1$			$\mu = 0, \sigma = 1$		
0	-1,00	0,00	0,798	-1,00	0,67	1,271
h	-0,50	0,00	1,381	-0,61	0,73	1,908
5h	-0,17	0,00	2,647	-0,24	1,04	3,427
10h	-0,09	0,00	3,655	-0,14	1,33	4,676
	$\mu = 1, \sigma = 0,5\mu$			$\mu = 1, \sigma = 0,5\mu$		
0	-1,00	1,00	0,399	-1,00	1,34	0,635
h	-0,92	1,09	1,406	-0,94	1,40	1,643
5h	-0,80	1,25	5,417	-0,84	1,54	5,657
10h	-0,75	1,34	10,424	-0,78	1,62	10,669
	$\mu = 1, \sigma = \mu$			$\mu = 1, \sigma = \mu$		
0	-1,00	1,00	0,798	-1,00	1,67	1,271
h	-0,71	1,40	1,896	-0,78	1,98	2,383
5h	-0,49	2,06	6,020	-0,55	2,59	6,559
10h	-0,41	2,44	11,084	-0,47	2,93	11,652
	$\mu = 1, \sigma = 3\mu$			$\mu = 1, \sigma = 3\mu$		
0	-1,00	1,00	2,393	-1,00	3,02	3,813
h	-0,54	1,86	4,364	-0,64	3,72	5,918
5h	-0,23	4,29	9,786	-0,30	6,13	11,871
10h	-0,16	6,25	15,558	-0,21	8,22	18,015

Tabel VI.1 Beleidsparameters en verwachte kosten per periode uitgedrukt in de relevante eenheden bij toepassing van de lineaire beslissingsregel voor $a_1 = a_2 = 0$

$a_1 = a_2$	$s = h$			$s = 3h$		
	m	θ_m	$C_{L(m)}$	m	θ_m	$C_{L(m)}$
	$\mu = 0, \sigma = 1$			$\mu = 0, \sigma = 1$		
0	1	0,00	0,798	1	0,67	1,271
$0,1\sigma h$	1	0,00	0,898	1	0,67	1,371
σh	3	0,00	1,436	2	0,81	2,045
$10\sigma h$	12	0,00	2,778	8	1,29	3,898
	$\mu = 1, \sigma = 0,5\mu$			$\mu = 1, \sigma = 0,5\mu$		
0	1	1,00	0,399	1	1,34	0,636
$0,1\mu h$	1	1,00	0,499	1	1,34	0,736
μh	2	1,41	1,138	2	2,03	1,572
$10\mu h$	6	3,38	3,301	5	4,22	4,236
	$\mu = 1, \sigma = \mu$			$\mu = 1, \sigma = \mu$		
0	1	1,00	0,798	1	1,67	1,271
$0,1\mu h$	1	1,00	0,898	1	1,67	1,371
μh	2	1,41	1,545	2	2,37	2,245
$10\mu h$	6	3,17	3,713	5	4,45	5,054
	$\mu = 1, \sigma = 3\mu$			$\mu = 1, \sigma = 3\mu$		
0	1	1,00	2,393	1	3,02	3,813
$0,1\mu h$	1	1,00	2,493	1	3,02	3,913
μh	1	1,00	3,393	1	3,02	4,813
$10\mu h$	5	2,61	6,182	4	5,47	8,851

Tabel VI.2 Beleidsparameters en gemiddelde verwachte kosten per periode uitgedrukt in de relevante eenheden bij toepassing van de lineaire beslissingsregel met variabele beslissingsperiode voor $b_1 = b_2 = 0$

$a_1 = a_2$	$s = h$			$s = 3h$		
	$\sigma = 0,5\mu$	$\sigma = \mu$	$\sigma = 3\mu$	$\sigma = 0,5\mu$	$\sigma = \mu$	$\sigma = 3\mu$
	$b_1 = b_2 = 0$			$b_1 = b_2 = 0$		
0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,1 μ h	1,8	2,2	0,8	0,7	1,0	0,5
μ h	6,4	14,5	13,9	10,2	18,2	7,8
10 μ h	3,6	12,5	26,0	7,3	19,4	29,1
	$b_1 = b_2 = h$			$b_1 = b_2 = h$		
0	0,6	3,0	4,9	0,3	2,7	3,8
0,1 μ h	1,0	4,5	7,3	0,7	3,7	4,5
μ h	3,6	10,3	18,3	6,2	13,4	12,6
10 μ h	2,7	9,7	23,0	5,8	16,0	26,9
	$b_1 = b_2 = 5h$			$b_1 = b_2 = 5h$		
0	0,4	3,1	11,8	0,3	3,8	13,6
0,1 μ h	0,5	3,6	12,9	0,5	4,1	14,1
μ h	1,6	7,0	19,3	2,7	8,5	19,5
10 μ h	1,4	5,1	24,7	3,2	9,2	29,6
	$b_1 = b_2 = 10h$			$b_1 = b_2 = 10h$		
0	0,3	2,2	12,4	0,3	2,9	15,8
0,1 μ h	0,3	2,5	12,9	0,4	3,1	16,2
μ h	1,3	5,1	17,3	1,8	7,1	19,9
10 μ h	0,9	3,3	27,8	2,1	6,1	33,7

Tabel VI.3 Procentuele afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode bij toepassing van de "optimale" lineaire beslissingsregel voor $\mu > 0$

Bijlage VII Resultaten met de beleidsparameters uit het model met continue controle

$a_1 = a_2$	$s = h$				$s = 3h$			
	d	D	U	u	d	D	U	u
	$b_1 = b_2 = 0$				$b_1 = b_2 = 0$			
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,1σh	-0,84	0,00	0,00	0,84	-0,48	0,15	0,15	0,99
σh	-1,82	0,00	0,00	1,82	-1,03	0,32	0,32	2,13
10σh	-3,91	0,00	0,00	3,91	-2,23	0,68	0,68	4,59
	$b_1 = b_2 = h$				$b_1 = b_2 = h$			
0	-1,00	-1,00	1,00	1,00	-0,41	0,41	1,22	1,22
0,1σh	-1,51	-0,66	0,66	1,51	-0,72	-0,14	0,87	1,72
σh	-2,26	-0,44	0,44	2,26	-1,21	0,05	0,83	2,64
10μh	-4,16	-0,24	0,24	4,16	-2,32	0,50	0,96	4,87
	$b_1 = b_2 = 5h$				$b_1 = b_2 = 5h$			
0	-2,24	-2,24	2,24	2,24	-0,91	-0,91	2,74	2,74
0,1σh	-2,70	-1,85	1,85	2,70	-1,22	-0,63	2,35	3,19
σh	-3,32	-1,51	1,51	3,32	-1,59	-0,33	1,97	3,79
10μh	-4,93	-1,01	1,01	4,93	-2,63	0,09	1,85	5,77
	$b_1 = b_2 = 10h$				$b_1 = b_2 = 10h$			
0	-3,16	-3,16	3,16	3,16	-1,29	-1,29	3,87	3,87
0,1σh	-3,61	-2,77	2,77	3,61	-1,59	-1,01	3,47	4,32
σh	-4,20	-2,38	2,38	4,20	-1,95	-0,70	3,07	4,89
10σh	-5,68	-1,76	1,76	5,68	-2,80	-0,09	2,38	6,30

Tabel VII.1 Optimale beleidsparameters bij continue controle in eenheden σ voor $\mu = 0$

$a_1 = a_2$	$s = h$				$s = 3h$			
	Δd	ΔD	ΔU	Δu	Δd	ΔD	ΔU	Δu
	$b_1 = b_2 = 0$				$b_1 = b_2 = 0$			
0	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,67	-0,67	-0,67	-0,67
0,1 σ h	-0,34	0,00	0,00	0,34	-0,78	-0,52	-0,52	-0,10
σ h	-0,40	0,00	0,00	0,40	-0,67	-0,38	-0,38	0,13
10 σ h	-0,47	0,00	0,00	0,47	-0,60	-0,24	-0,24	0,32
	$b_1 = b_2 = h$				$b_1 = b_2 = h$			
0	-0,30	-0,30	0,30	0,30	-0,63	-0,63	-0,05	-0,05
0,1 σ h	-0,42	0,02	-0,02	0,42	-0,66	-0,37	-0,38	0,07
σ h	-0,43	0,09	-0,09	0,43	-0,63	-0,28	-0,35	0,20
10 σ h	-0,48	0,05	-0,05	0,48	-0,58	-0,22	-0,23	0,34
	$b_1 = b_2 = 5h$				$b_1 = b_2 = 5h$			
0	-0,42	-0,42	0,42	0,42	-0,52	-0,52	0,21	0,21
0,1 σ h	-0,53	-0,07	0,07	0,53	-0,60	-0,27	-0,14	0,30
σ h	-0,51	0,05	-0,05	0,51	-0,55	-0,08	-0,35	0,22
10 σ h	-0,51	0,07	-0,07	0,51	-0,57	0,32	-0,20	0,38
	$b_1 = b_2 = 10h$				$b_1 = b_2 = 10h$			
0	-0,46	-0,46	0,46	0,46	-0,51	-0,51	0,30	0,30
0,1 σ h	-0,56	-0,12	0,12	0,56	-0,59	-0,24	-0,06	0,40
σ h	-0,54	0,02	-0,02	0,54	-0,55	-0,06	-0,24	0,32
10 σ h	-0,53	0,05	-0,05	0,53	-0,44	0,06	-0,52	0,07

Tabel VII.2 Verschillen tussen de optimale beleidsparameters bij continue en periodieke controle in eenheden σ voor $\mu = 0$

Δ := optimale waarde bij continue controle - optimale waarde bij periodieke controle

$a_1=a_2$	$s = h$				$s = 3h$			
	$b=0$	$b=h$	$b=5h$	$b=10h$	$b=0$	$b=h$	$b=5h$	$b=10h$
0	0,796	1,321	2,396	3,277	1,277	1,848	3,109	4,148
$0,1\sigma h$	0,869	1,360	2,420	3,293	1,348	1,898	3,138	4,171
σh	1,188	1,569	2,543	3,384	1,738	2,169	3,302	4,295
$10\sigma h$	2,105	2,335	3,075	3,802	2,919	3,185	4,055	4,887

Tabel VII.3 Verwachte kosten per periode in eenheden σh bij toepassing van de optimale beleidsparameters uit het model met continue controle voor $\mu = 0$

$b_1=b_2$	$\sigma = 0,5\mu$		$\sigma = \mu$		$\sigma = 3\mu$	
	d_c	u_c	d_c	u_c	d_c	u_c
	$s = h$		$s = h$		$s = h$	
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
h	-0,09	2,09	-0,34	2,34	-2,11	4,11
$5h$	-0,09	10,09	-0,35	10,35	-2,99	12,99
$10h$	-0,09	20,09	-0,35	20,35	-3,11	23,11
	$s = 3h$		$s = 3h$		$s = 3h$	
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
h	-0,04	2,11	-0,14	2,43	-0,87	4,62
$5h$	-0,04	10,11	-0,14	10,43	-1,24	13,72
$10h$	-0,04	20,11	-0,14	20,43	-1,29	23,87

Tabel VII.4 Optimale beleidsparameters bij continue controle in eenheden μ voor $\mu > 0$

$b_1=b_2$	$\sigma = 0,5\mu$		$\sigma = \mu$		$\sigma = 3\mu$	
	ΔD	ΔU	ΔD	ΔU	ΔD	ΔU
	$s = h$		$s = h$		$s = h$	
0	-1,00	-1,00	-1,00	-1,00	-1,00	-1,00
h	-1,09	-0,69	-1,33	-0,62	-1,84	-0,04
5h	-1,09	-0,69	-1,24	-0,60	-1,92	+0,28
10h	-1,10	-0,73	-1,24	-0,60	-1,96	+0,35
	$s = 3h$		$s = 3h$		$s = 3h$	
0	-1,34	-1,34	-1,67	-1,67	-3,02	-3,02
h	-1,37	-0,91	-1,93	-1,01	-3,01	-1,59
5h	-1,37	-0,90	-1,94	-1,09	-2,81	-1,42
10h	-1,38	-0,93	-1,94	-1,08	-2,80	-0,61

Tabel VII.5 Verschillen tussen de optimale beleidsparameters continue en periodieke controle in eenheden μ voor $\mu > 0$

$b_1=b_2$	$s = h$			$s = 3h$		
	$\sigma = 0,5\mu$	$\sigma = \mu$	$\sigma = 3\mu$	$\sigma = 0,5\mu$	$\sigma = \mu$	$\sigma = 3\mu$
0	0,396	0,796	2,388	0,635	1,271	3,804
h	1,397	1,841	4,159	1,638	2,321	5,702
5h	5,397	5,841	8,753	5,638	6,321	10,450
10h	10,397	10,841	13,838	10,638	11,321	15,552

Tabel VII.6 Verwachte kosten per periode in eenheden μh bij toepassing van de optimale beleidsparameters uit het model met continue controle voor $a_1 = a_2 = 0$ en $\mu > 0$

Bijlage VIII Optimale normvoorraad en verwachte kosten per periode

m	$\sigma = 0,5\mu$		$\sigma = \mu$		$\sigma = 3\mu$	
	θ_m	$\theta_m - \theta_{m-1}$	θ_m	$\theta_m - \theta_{m-1}$	θ_m	$\theta_m - \theta_{m-1}$
			s = h			
1	1,00		1,00		1,00	
2	1,41	0,41	1,41	0,41	1,41	0,41
3	1,89	0,47	1,83	0,42	1,82	0,40
4	2,39	0,50	2,27	0,43	2,21	0,40
5	2,88	0,49	2,72	0,45	2,61	0,39
6	3,38	0,50	3,18	0,47	3,00	0,39
7	3,88	0,50	3,66	0,47	3,40	0,40
8	4,38	0,50	4,13	0,48	3,80	0,40
9	4,88	0,50	4,61	0,48	4,20	0,40
10	5,38	0,50	5,10	0,48	4,60	0,40
			s = 3h			
1	1,34		1,68		3,02	
2	2,03	0,70	2,33	0,65	3,86	0,84
3	2,76	0,73	3,03	0,70	4,67	0,80
4	3,49	0,73	3,74	0,71	5,45	0,78
5	4,22	0,73	4,45	0,71	6,23	0,78
6	4,96	0,74	5,17	0,72	7,00	0,77
7	5,69	0,74	5,89	0,72	7,77	0,77
8	6,43	0,74	6,61	0,72	8,53	0,76
9	7,18	0,74	7,33	0,72	9,29	0,76
10	7,92	0,74	8,06	0,72	10,04	0,75

Tabel VIII.1 Optimale normvoorraad in eenheden μ bij een beslissingsperiode van m tijdsperioden en $\mu > 0$

m	$\sigma = 0,5\mu$		$\sigma = \mu$		$\sigma = 3\mu$	
	$C_V(\theta_{m,b})$	$\Delta^*)$	$C_V(\theta_{m,b})$	$\Delta^*)$	$C_V(\theta_{m,b})$	$\Delta^*)$
			s = h			
1	0,399		0,798		2,393	
2	0,641	0,243	1,047	0,249	2,917	0,524
3	0,893	0,252	1,300	0,253	3,377	0,460
4	1,140	0,247	1,555	0,255	3,799	0,421
5	1,388	0,248	1,809	0,253	4,194	0,396
6	1,636	0,248	2,060	0,252	4,571	0,377
7	1,885	0,249	2,310	0,250	4,933	0,362
8	2,134	0,249	2,560	0,249	5,284	0,351
9	2,383	0,249	2,809	0,249	5,625	0,341
10	2,632	0,249	3,058	0,249	5,957	0,333
			s = 3h			
1	0,635		1,271		3,813	
2	1,074	0,438	1,748	0,477	4,752	0,939
3	1,469	0,395	2,206	0,458	5,588	0,836
4	1,857	0,388	2,642	0,437	6,355	0,767
5	2,241	0,383	3,066	0,424	7,073	0,718
6	2,621	0,381	3,481	0,415	7,753	0,680
7	3,000	0,379	3,889	0,408	8,401	0,649
8	3,378	0,378	4,293	0,403	9,025	0,624
9	3,755	0,377	4,692	0,399	9,628	0,603
10	4,131	0,376	5,088	0,396	10,213	0,585

Tabel VIII.2 Gemiddelde verwachte voorraadkosten per tijdsperiode in eenheden μh bij een beslissingsperiode van m tijdseenheden en de norm-voorraad gegeven door formule (8.3)

$$*) \Delta := C_V(\theta_{m,b}) - C_V(\theta_{m-1,b})$$

Bijlage IX Verschillen tussen de optimale beleidsparameters

$a_1=a_2$	$s = h$			$s = 3h$		
	$\sigma = 0,5\mu$	$\sigma = \mu$	$\sigma = 3\mu$	$\sigma = 0,5\mu$	$\sigma = \mu$	$\sigma = 3\mu$
	$b_1 = b_2 = h$			$b_1 = b_2 = h$		
0	1,78	2,06	4,42	1,69	1,85	3,56
0,1 μ h	1,06	2,07	4,37	1,77	1,87	3,54
μ h	2,00	2,02	4,01	2,11	2,01	3,38
10 μ h	2,00	2,00	2,80	1,98	2,00	2,66
	$b_1 = b_2 = 5h$			$b_1 = b_2 = 5h$		
0	9,78	10,07	13,78	9,68	9,85	12,84
0,1 μ h	9,86	10,07	13,71	9,76	9,87	12,80
μ h	10,00	9,99	13,21	10,13	9,99	12,49
10 μ h	10,02	9,92	11,52	10,05	9,93	11,33
	$b_1 = b_2 = 10h$			$b_1 = b_2 = 10h$		
0	19,83	20,07	23,93	19,70	19,84	22,97
0,1 μ h	19,84	20,07	23,85	19,76	19,88	22,92
μ h	20,00	19,96	23,33	20,31	19,97	22,60
10 μ h	20,15	19,88	21,85	20,13	19,89	21,40

Tabel IX.1 Verschil tussen de terugkeerpunten (U-D) in eenheden μ voor $\mu > 0$

$a_1 = a_2$	$s = h$			$s = 3h$		
	$\sigma = 0,5\mu$	$\sigma = \mu$	$\sigma = 3\mu$	$\sigma = 0,5\mu$	$\sigma = \mu$	$\sigma = 3\mu$
	$b_1 = b_2 = 0$			$b_1 = b_2 = 0$		
$0,1\mu h$	0,37	0,50	0,86	0,31	0,42	0,70
μh	1,41	1,59	2,64	1,52	1,52	2,33
$10\mu h$	4,47	4,59	6,82	4,51	4,60	6,73
	$b_1 = b_2 = h$			$b_1 = b_2 = h$		
$0,1\mu h$	0,45	0,50	0,74	0,45	0,51	0,73
μh	1,41	1,55	2,36	1,42	1,52	2,35
$10\mu h$	4,48	4,60	6,72	4,53	4,60	6,73
	$b_1 = b_2 = 5h$			$b_1 = b_2 = 5h$		
$0,1\mu h$	0,48	0,49	0,74	0,48	0,49	0,74
μh	1,43	1,52	2,35	1,43	1,52	2,35
$10\mu h$	4,47	4,50	6,73	4,49	4,52	6,73
	$b_1 = b_2 = 10h$			$b_1 = b_2 = 10h$		
$0,1\mu h$	0,57	0,44	0,74	0,56	0,44	0,74
μh	1,44	1,49	2,34	1,47	1,49	2,34
$10\mu h$	4,53	4,51	6,67	4,51	4,53	6,68

Tabel IX.2 Minimale transactie-omvang bij een kassaldoovermindering ($u-U$) in eenheden μ voor $\mu > 0$

$a_1 = a_2$	$s = h$			$s = 3h$		
	$\sigma = 0,5\mu$	$\sigma = \mu$	$\sigma = 3\mu$	$\sigma = 0,5\mu$	$\sigma = \mu$	$\sigma = 3\mu$
	$b_1 = b_2 = 0$			$b_1 = b_2 = 0$		
0,1 μ h	0,36	0,51	0,87	0,27	0,38	0,67
μ h	1,52	1,67	2,70	1,10	1,26	2,02
10 μ h	5,78	5,74	7,44	4,61	4,69	5,76
	$b_1 = b_2 = h$			$b_1 = b_2 = h$		
0,1 μ h	0,36	0,48	0,73	0,27	0,36	0,54
μ h	1,52	1,70	2,39	1,09	1,25	1,73
10 μ h	5,75	5,73	7,20	4,61	4,69	5,48
	$b_1 = b_2 = 5h$			$b_1 = b_2 = 5h$		
0,1 μ h	0,27	0,47	0,67	0,23	0,36	0,49
μ h	1,52	1,76	2,25	1,06	1,27	1,59
10 μ h	5,73	6,03	7,01	4,56	4,85	5,25
	$b_1 = b_2 = 10h$			$b_1 = b_2 = 10h$		
0,1 μ h	0,18	0,47	0,70	0,17	0,35	0,50
μ h	1,52	1,89	2,30	0,78	1,31	1,59
10 μ h	5,39	6,06	7,04	4,46	4,88	5,26

Tabel IX.3 Minimale transactie-omvang bij een kassaldovermeerdering (D-d) in eenheden μ voor $\mu > 0$

Bijlage X Resultaten met de geconstrueerde benaderingsformules

$a_1 = a_2$	$s = h$			$s = 3h$		
	$\sigma = 0,5\mu$	$\sigma = \mu$	$\sigma = 3\mu$	$\sigma = 0,5\mu$	$\sigma = \mu$	$\sigma = 3\mu$
	$b_1 = b_2 = 0$			$b_1 = b_2 = 0$		
0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,1 μ h	0,4	0,0	0,0	0,7	0,4	0,0
μ h	0,0	0,0	0,0	3,4	2,3	1,1
10 μ h	3,5	1,5	2,6	0,0	0,6	2,6
	$b_1 = b_2 = h$			$b_1 = b_2 = h$		
0	0,0	0,1	4,8	0,0	0,0	2,5
0,1 μ h	0,1	0,0	5,0	0,2	0,1	2,2
μ h	0,0	0,0	1,8	2,0	1,4	0,8
10 μ h	2,7	1,1	2,9	0,0	0,5	2,7
	$b_1 = b_2 = 5h$			$b_1 = b_2 = 5h$		
0	0,0	0,0	4,9	0,0	0,0	3,2
0,1 μ h	0,0	0,0	4,8	0,1	0,0	2,9
μ h	0,0	0,0	2,2	0,8	0,6	1,2
10 μ h	1,4	0,6	2,6	0,0	0,3	2,4
	$b_1 = b_2 = 10h$			$b_1 = b_2 = 10h$		
0	0,0	0,0	3,2	0,0	0,0	2,3
0,1 μ h	0,0	0,0	3,0	0,0	0,0	2,3
μ h	0,0	0,0	1,5	0,4	0,3	0,9
10 μ h	0,8	0,4	1,9	0,0	0,2	1,8

Tabel X.1 Procentuele afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode bij toepassing van de benaderingsformules voor $\mu > 0$

$a_1 = a_2$	$s = h$			$s = 3h$		
	$\sigma = 0,5\mu$	$\sigma = \mu$	$\sigma = 3\mu$	$\sigma = 0,5\mu$	$\sigma = \mu$	$\sigma = 3\mu$
	$b_1 = b_2 = 0$			$b_1 = b_2 = 0$		
0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$-0,1\mu h$	0,4	0,0	0,0	1,1	0,2	0,0
$-\mu h$	0,0	0,0	0,0	1,6	1,2	0,3
$-10\mu h$	3,5	1,5	2,6	0,0	0,7	0,4
	$b_1 = b_2 = h$			$b_1 = b_2 = h$		
0	0,0	0,1	5,0	0,0	1,0	3,2
$-0,1\mu h$	0,1	0,0	4,8	0,4	3,1	2,4
$-\mu h$	0,0	0,0	1,8	0,9	0,6	1,4
$-10\mu h$	2,7	1,1	2,9	0,0	0,6	0,6
	$b_1 = b_2 = 5h$			$b_1 = b_2 = 5h$		
0	0,0	0,0	4,9	0,0	0,5	9,7
$-0,1\mu h$	0,0	0,0	4,8	0,1	0,3	8,5
$-\mu h$	0,0	0,0	2,2	0,3	0,2	5,4
$-10\mu h$	1,4	0,6	2,6	0,0	0,3	2,0
	$b_1 = b_2 = 10h$			$b_1 = b_2 = 10h$		
0	0,0	0,0	3,2	0,0	0,3	8,5
$-0,1\mu h$	0,0	0,0	3,0	0,1	0,1	7,6
$-\mu h$	0,0	0,0	1,5	0,2	0,1	5,3
$-10\mu h$	0,8	0,4	1,9	0,0	0,2	2,3

Tabel X.2 Procentuele afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode bij toepassing van de benaderingsformules voor $\mu < 0$

a_1	$\sigma = \mu$				$\sigma = 3\mu$			
	$b_1=b_2=0$		$b_1=b_2=5h$		$b_1=b_2=0$		$b_1=b_2=5h$	
	$s = h$	$s = 3h$	$s = h$	$s = 3h$	$s = h$	$s = 3h$	$s = h$	$s = 3h$
0,1 μh	0,0	0,3	0,0	0,0	0,0	0,0	4,6	2,9
μh	0,4	1,9	0,0	0,5	0,7	1,5	2,3	1,3
10 μh	1,3	0,4	0,5	0,3	0,1	0,8	2,5	2,1
a_2								
0,1 μh	0,2	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	4,8	3,2
μh	0,1	0,0	0,0	0,0	0,3	0,0	4,7	3,1
10 μh	0,1	0,0	0,0	0,0	5,4	3,4	4,7	3,2

Tabel X.3 Procentuele afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode bij toepassing van de benaderingsformules voor $a_1 = a_2 = 0$ en $\mu < 0$

b	$\sigma = \mu$				$\sigma = 3\mu$			
	$s = h$		$s = 3h$		$s = h$		$s = 3h$	
	$b_1 = b$ $b_2 = 0$	$b_1 = 0$ $b_2 = b$	$b_1 = b$ $b_2 = 0$	$b_1 = 0$ $b_2 = b$	$b_1 = b$ $b_2 = 0$	$b_1 = 0$ $b_2 = b$	$b_1 = b$ $b_2 = 0$	$b_1 = 0$ $b_2 = b$
h	0,0	0,0	0,0	0,0	2,6	3,5	1,1	1,4
5 h	0,0	0,0	0,0	0,0	4,2	10,2	2,6	5,2
10 h	0,0	0,0	0,0	0,0	3,1	10,2	2,1	6,1

Tabel X.4 Procentuele afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode bij toepassing van de benaderingsformules voor $b_1 = b_2 = 0$ en $\mu > 0$

$a_1 = a_2$	$\sigma = 2\mu, s = h$	$\sigma = 2\mu, s = 3h$	$\sigma = -2\mu, s = 3h$
	$b_1 = b_2 = 0$		
0	0,0	0,0	0,0
0,1 μh	0,0	0,5	0,3
μh	0,0	1,2	0,9
10 μh	2,4	2,4	0,6
	$b_1 = b_2 = h$		
0	2,4	2,3	1,7
0,1 μh	1,9	1,5	1,1
μh	0,1	0,2	0,4
10 μh	2,1	2,2	0,3
	$b_1 = b_2 = 5h$		
0	1,5	1,6	3,1
0,1 μh	1,1	1,1	2,5
μh	6,0	0,3	0,7
10 μh	1,2	1,4	0,2
	$b_1 = b_2 = 10h$		
0	0,9	1,0	2,0
0,1 μh	0,7	0,7	1,7
μh	0,0	0,2	0,5
10 μh	0,8	1,0	0,2

Tabel X.5 Procentuele afwijkingen van de minimaal verwachte kosten per periode bij toepassing van de benaderingsformules

SYMBOLENLIJST

In de onderstaande symbolenlijst zijn alleen die symbolen opgenomen welke we in meerdere onderdelen (paragrafen of bijlagen) van deze studie gebruiken. Eerst worden de symbolen vermeld welke in meerdere hoofdstukken gehanteerd worden. Vervolgens die welke we hoofdzakelijk in een bepaald hoofdstuk en in de daarbij behorende bijlage gebruiken.

- x_t : het kassaldo aan het begin van periode t (de toestandsvariabele)
- v_t : de transactie-omvang aan het begin van periode t (de beslissingsvariabele)
- k_t : de kassaldoverandering in periode t
- t : de periode-index bij voorwaartse nummering
- n : de periode-index bij achterwaartse nummering
- $f(.)$: een dichtheidsfunctie
- $F(.)$: een verdelingsfunctie
- $E\{. \}$: een verwachtingswaarde
- $P[.]$: de kans op een bepaalde gebeurtenis
- λ : een positieve constante

Probleemparameters

- h : de kosten van het in voorraad houden per geldeenheid per periode
- s : de kosten van tekort per geldeenheid per periode
- a_1 : de vaste transactiekosten verbonden aan een kassaldovermeerdering
- a_2 : de vaste transactiekosten verbonden aan een kassaldovermindering
- b_1 : de proportionele transactiekosten verbonden aan een kassaldovermeerdering
- b_2 : de proportionele transactiekosten verbonden aan een kassaldovermindering
- μ : de verwachte kassaldoverandering per periode
- σ : de standaardafwijking van de kassaldoverandering per periode

Kostenfuncties

- $T(.)$: de transactiekostenfunctie
 $V(.)$: de voorraadkostenfunctie
 $L(.)$: de verwachte voorraadkosten per periode, gegeven het saldo direct na de transactiebeslissing
 C : de minimaal verwachte kosten per periode bij een optimaal beleid en een plantijdvak met een oneindige horizon

Beleidsparameters

- d : de onderste controlegrens
 D : het onderste terugkeerpunt
 U : het bovenste terugkeerpunt
 u : de bovenste controlegrens

 $U-d$: het continueringsgebied
 $u-U$: minimale transactie-omvang bij een kassaldovermindering
 $D-d$: minimale transactie-omvang bij een kassaldovermeerdering

Hoofdstuk 2: De structuur van het optimale beleid

- y_t : het kassaldo direct na de transactiebeslissing in periode t
 α : de disconteringsfactor
 $H_n(.)$: de minimaal verwachte gediscoteerde kosten, gegeven het begin-saldo $(.)$, bij een plantijdvak van n perioden
 $G_n(.)$: de minimaal verwachte gediscoteerde kosten, gegeven het saldo direct na de transactiebeslissing $(.)$, bij een plantijdvak van n perioden
 $v(x_n)$: de optimale transactie-omvang, gegeven het kassaldo aan het begin van periode n

Hoofdstuk 3: Bepaling van de optimale oplossing

- N : het aantal toestanden in het gediscretiseerde model
 $X(i)$: het kassaldo aan het begin van een periode in het gediscretiseerde model ($i = 1, 2, \dots, N$)
 $Y(w)$: het kassaldo direct na de transactiebeslissing in het gediscretiseerde model ($w = 1, 2, \dots, N$)
 M : het aantal mogelijke realisaties van de kassaldooverandering
 $K(\ell)$: de realisatie van de kassaldooverandering in het gediscretiseerde model ($\ell = 1, 2, \dots, M$)
 z : de afstand in geldeenheden tussen twee opeenvolgende toestanden of tussen twee opeenvolgende mogelijke realisaties van de kassaldooverandering
 ε : het grootste absolute verschil tussen de waarden van dezelfde beleidsparameters in twee opeenvolgende perioden
 $C_n(.)$: de minimaal verwachte kosten per periode, gegeven het begin saldo ($.$), bij een plantijdvak van n perioden
 $I_n(.)$: de minimaal verwachte kosten gegeven het saldo direct na de transactiebeslissing ($.$), bij een plantijdvak van n perioden

Hoofdstuk 5: De voorraadtheoretische benadering

- R_w : de netto opbrengst gedurende een periode, indien er gedurende die periode w transacties plaatsvinden
 c : de opbrengst per geldeenheid in kas per tijdseenheid
 r : de opbrengst per belegde eenheid per tijdseenheid
 i : te betalen rente per geldeenheid tekort per tijdseenheid
 d_v : de onderste controlegrens indien bepaald met een voorraadtheoretische benadering
 D_v : het onderste terugkeerpunt indien bepaald met een voorraadtheoretische benadering
 Q_v : de minimale transactie-omvang bij een voorraadtheoretische benadering
 C_v : de verwachte kosten per periode bij een voorraadtheoretische benadering

Hoofdstuk 6: De lineaire beslissingsregel

- κ : de aanpassingscoëfficiënt
 θ : de normvoorraad
 μ_x : het verwachte kassaldo aan het begin van een periode
 μ_v : de verwachte transactie-omvang
 σ_x^2 : de variantie van het kassaldo aan het begin van een periode
 σ_v^2 : de variantie van de transactie-omvang
 $\phi(.)$: de standaardnormale dichtheidsfunctie
 $\Phi(.)$: de standaardnormale verdelingsfunctie
 C_{VL} : de verwachte voorraadkosten per periode bij toepassing van de lineaire beslissingsregel
 C_{TL} : de verwachte transactiekosten per periode
 C_L : de verwachte kosten per periode
 m : het aantal tijdsperiodes waaruit een beslissingsperiode bestaat

Indien bovenstaande grootheden voorzien zijn van een subscript m hebben ze betrekking op een beslissingsperiode van m tijdsperiodes.

Hoofdstuk 7: Continue controle

- d_c : de onderste controlegrens bij continue controle
 D_c : het onderste terugkeerpunt bij continue controle
 U_c : het bovenste terugkeerpunt bij continue controle
 \bar{U}_c : de bovenste controlegrens bij continue controle
 $k(t,s)$: de cumulatieve kassaldooverandering gedurende $[t,s]$
 $x(t)$: het kassaldo op tijdstip t
 Y : de verwachte kosten per tijdseenheid bij continue controle
 $W(.)$: een potentiële kostenfunctie
 $W'(.)$: de eerste afgeleide van de potentiële kostenfunctie naar de toestandsvariabele in het punt $(.)$

Hoofdstuk 8: Een alternatieve beslissingsregel

- $\theta_{m,b}$: een benadering voor de optimale normvoorraad bij een beslissingsperiode van m tijdsperioden
 m_b : een benadering voor het optimale tijdsinterval tussen twee transacties
 d_b : een benadering voor de onderste controlegrens
 D_b : een benadering voor het onderste terugkeerpunt
 U_b : een benadering voor het bovenste terugkeerpunt
 u_b : een benadering voor de bovenste controlegrens

AANGEHAALDE LITERATUUR

- BAUMOL, W.J., 1952, The transactions demand for cash: an inventory theoretic approach, *Quarterly Journal of Economics* 66, blz. 545-556.
- BERTSEKAS, D.P., 1976, *Dynamic Programming and Stochastic Control* (Academic Press, New York), blz. 81-89.
- BRADLEY, S.P. and D.B. CRANE, 1972, A dynamic model for bond portfolio management, *Management Science* 19, blz. 139-151.
- BRADLEY, S.P., A.C. HAX en T.L. MAGNANTI, 1977, *Applied Mathematical Programming* (Addison-Wesley), blz. 625-650.
- BREALEY, R. en S. MYERS, 1981, *Principles of Corporate Finance* (McGraw-Hill), blz. 603-604.
- BÜHLER, G., 1979, *Sicherheitsäquivalente und Informationsbedarf bei stochastischen dynamischen Produktions-Lagerhaltungs-Modellen* (Haag + Herchen Verlag, Frankfurt/Main).
- BÜHLER, W. en H. GEHRING, 1978, Short-term financial planning with uncertain receipts and disbursements, *European Journal of Operational Research* 2, blz. 313-326.
- CHEN, A.W., 1977, Portfolio selection with stochastic cash demands, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 12, blz. 197-213.
- CONSTANTINIDES, G.M., 1976, Stochastic cash management with fixed and proportional transaction costs, *Management Science* 22, blz. 1320-1331.
- CONSTANTINIDES, G.M., 1978, Market risk adjustment in project valuation, *Journal of Finance* 33, blz. 603-615.
- CONSTANTINIDES, G.M. en S.F. RICHARD, 1978, Existence of optimal simple policies for discounted-cost inventory and cash management in continuous time, *Operations Research* 26, blz. 620-636.
- DAELLENBACH, H.G., 1971, A stochastic cash balance model with two sources of short term funds, *International Economic Review* 12, blz. 250-256.
- DAELLENBACH, H.G., 1974, Are cash management optimization models worthwhile? *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 9, blz. 607-626.

- DE GHELLINCK, G.T. en G.D. EPPEN, 1967, Linear programming solutions for separable Markovian decision problems, *Management Science* 13, blz. 371-394.
- DORHOUT, B., J. KRIENS en J.Th. van LIESHOUT, 1977, Wiskundige programmering 2, Leergang Besliskunde deel 6b (Mathematisch Centrum, Amsterdam), blz. 107-113.
- ELTON, E.J. en M.J. GRUBER, 1974, On the cash balance problem, *Operational Research Quarterly* 25, blz. 553-572.
- EPPEN, G.D. en E.F. FAMA, 1968, Solutions for cash balance and simple dynamic-portfolio problems, *Journal of Business* 41, 94-112.
- EPPEN, G.D. en E.F. FAMA, 1969, Cash balance and simple dynamic portfolio problems with proportional costs, *International Economic Review* 10, blz. 119-133.
- EPPEN, G.D. en E.F. FAMA, 1971, Three asset cash balance and dynamic portfolio problems, *Management Science* 17, blz. 331-319.
- FISHER, D.I., 1973, Cash management, A Research Report from the Conference Board (New York).
- FRENKEL, J.A. en B. JOVANOVIĆ, 1980, On transactions and precautionary demand for money, *Quarterly Journal of Economic* 95, blz. 25-43.
- FROST, P.A., 1970, Banking services, minimum cash balances and the firm's demand for money, *Journal of Finance* 25, blz. 1029-1039.
- GIRGIS, N.M., 1968, Optimal cash balance levels, *Management Science* 15, blz. 130-140.
- GLASER, H., 1982, Liquiditätsreserves und Zielfunktionen in der Kurzfristigen Finanzplanung (Gabler, Wiesbaden), blz. 156-199.
- GOLDEN, B., M. LIBERATORE en C. LIEBERMAN, 1979, Models and solution techniques for cash-flow management, *Computers and Operations Research* 6, blz. 13-20.
- GOSLINGS, J.H.W., 1977, Optimale kassen bij een tijdshorizon van een periode, *Bedrijfskunde* 49, blz. 347-352.
- HADLEY, G., 1964, A comparison of order quantities computed using the average annual cost and the discounted cost, *Management Science* 10, blz. 472-476.
- HAUSMAN, W.H. en A. SANCHEZ-BELL, 1975, The stochastic cash balance problem with average compensating-balance requirements, *Management Science* 21, blz. 849-857.

- HOCHSTÄDTER, D., 1971, A stationary solution for the cash balance problem, *Operations Research Verfahren X*, blz. 76-88.
- HOLT, C., F. MODIGLIANI, I.F. MUTH en H.A. SIMON, 1960, *Planning, production, inventories and workforce* (Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.).
- HOMONOFF, R. en D.W. MULLINS, 1975, *Cash Management: an inventory control limit approach* (Lexington Books, London).
- INDERFURTH, K., 1977, *Zur Güte Linearer Entscheidungsregeln in Produktions-Lagerhaltungs-Modellen* (Westdeutscher Verlag, Opladen).
- INDERFURTH, K., 1978, Optimale Kassenhaltung bei beschränktem Geldtransfer und Kassenbestand, *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* 48, blz. 651-665.
- KALBERG, J.G., R.W. WHITE en W.T. ZIEMBA, 1982, Short term financial planning under uncertainty, *Management Science* 28, blz. 670-682.
- KALBERG, J.G. en W.T. ZIEMBA, 1981, An algorithm for portfolio revision: theory, computational algorithm and empirical results, in R.L. Schultz editor: *Applications of Management Science*, volume 1 (JAI Press, Greenwich), blz. 267-291.
- KISTNER, K.P., 1975, Taktische und Strategische Modelle der Kassenhaltungstheorie, *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* 45, blz. 619-648.
- LEVE, G. de en H.C. TIJMS, 1970, *Dynamische programmering 2, Leergang Besliskunde deel 7b* (Mathematisch Centrum, Amsterdam), blz. 166-168.
- LOCKYER, K.G., 1973, Cash as an item of stock, *Journal of Business Finance* 5, blz. 44-51.
- MAIER, S.F. en J.H. VANDER WEIDE, 1978, A practical approach to short-run financial planning, *Financial Management* 7, blz. 10-16.
- MALDONADO, R.M. en L.S. RITTER, 1971, Optimal municipal cash management: a case study, *the Review of Economics and Statistics* 53, blz. 384-388.
- MAO, J.C.T., 1968, Application of linear programming to short-term financing decision, *Engineering Economist* 13, blz. 221-241.
- MAO, J.C.T. en C.E. SARNDAL, 1978, Cash management: theory and practice, *Journal of Business Finance and Accounting* 5, blz. 329-338.
- MANNE, A.S., 1960, Linear programming and sequential decisions, *Management Science* 6, blz. 259-267.

- MATSER, A.B. en L.A. SOENEN, 1984, Geldstroombeheersing in het Nederlandse bedrijfsleven, *Economische Statistische Berichten* 69, blz. 258-260.
- MILLER, M.H. en D. ORR, 1966, A model of the demand for money by firms, *Quarterly Journal of Economics* 80, blz. 413-435.
- MILLER, M.H. en D. ORR, 1967, An application of control-limit models to the management of corporate cash balances, in A.A. Robichek editor: *Financial Research and Management decisions* (John Wiley and Sons, New York), blz. 133-151.
- MILLER, M.H. en D. ORR, 1968, The demand for money by firms: extensions of analytic results, *Journal of Finance* 23, blz. 735-759.
- MITCHELL, W.E., 1967, Cash forecasting: the four methods compared in E.J. Mock editor: *Financial Decision-making* (Int. textbookco., Scranton), blz. 232-243.
- MORTON, E.T., 1981, Forward algorithms for forward-thinking managers, in: R.L. Schultz editor, *Applications of Management Science*, Vol. 1 (JAI Press, Greenwich), blz. 1-55.
- NEAVE, E.H., 1970, The stochastic cash balance problem with fixed costs for increases and decreases, *Management Science* 16, blz. 472-490.
- ORGLER, Y.E., 1969, An unequal-period model for cash management decisions, *Management Science* 16, blz. B77-B92.
- ORR, D., 1970, *Cash Management and the Demand for Money* (Praeger Publishers, New York).
- POGUE, G.A. en R.N. BUSSARD, 1972, A linear programming model for short term financial planning under uncertainty, *Sloan Management Review* 23, blz. 69-98.
- PORTEUS, E.L. en E.H. NEAVE, 1972, The stochastic cash balance problem with charges levied against the balance, *Management Science* 18, blz. 600-602.
- RAMA SASTRY, A.S., 1970, The effect of credit on transactions demand for cash, *Journal of Finance* 25, blz. 777-781.
- ROBERTS, D., 1962, Approximations to optimal policies in a dynamic inventory model, in K.J. Arrow, S. Karlin en H. Scarff editors: *Studies in Applied Probability and Management Science* (Stanford University Press).
- ROBICHEK, A.A., D. TEICHROEW en J.M. JONES, 1965, Optimal short term financing decision, *Management Science* 13, blz. 1-36.

- SCARF, H., 1960, The optimality of (S,s) policies in the dynamic inventory problem, in K.J. Arrow, S. Karlin en P. Suppes editors: *Mathematical Methods in the Social Science* (Stanford University Press).
- SCHNEEWEISS, C., 1975, Dynamic certainty equivalents in production smoothing theory, *International Journal of Systems Science* 6, blz. 353-365.
- SCHNEEWEISS, C., 1977, Linear decision rules for cash-balancing and inventory problems, *European Journal of Operations Research* 1, blz. 386-395.
- SCHNEIDER, H., 1979, *Servicegrade in Lagerhaltungsmodellen* (Marchal und Matzenbacher, Berlin).
- SCOTT, J.A., 1983, An empirical analysis of alternative strategies for managing the Cash Balance (University Microfilms Int. Ann Arbor).
- SLANGEN, P. 1984, Effectieve oplossingsprocedures voor het deterministische kasbeheersprobleem, in Van der Bergh, Van de Meiden, Ruizendaal en Verhagen, redactie: *Financiering en Belegging: stand van zaken anno 1984* (Erasmus Universiteit, Rotterdam), blz. 321-337.
- SPÄTH, H., W. GUTGESELL en G. GRÜN, 1972, Ein lineares Programm für die kurzfristige optimale liquiditätsdisposition in einem Grossunternehmen, *Zeitschrift Für Operations Research* 16, blz. B191-B206.
- SRINIVASAN, V., 1974, A transshipment model for cash management decisions, *Management Science* 20, blz. 1350-1363.
- STONE, B.K., 1972, The use of forecasts and smoothing in control-limit models for cash management, *Financial Management*, blz. 72-84.
- THORE, S., 1968, Programming bank reserves under uncertainty, *Swedish Journal of Economics* 70, blz. 123-137.
- TOBIN, J., 1956, The interest-elasticity of transactions demand for cash, *the Review of Economics and Statistics* 38, blz. 241-247.
- TSIANG, S.C., 1969, The precautionary demand for money: an inventory theoretical analysis, *Journal of Political Economy* 77, blz. 99-117.
- VIAL, J.P., 1972, A continuous time model for the cash balance problem in Szegö and Shell editors: *Mathematical Methods in Investment and Finance* (North-Holland, Amsterdam), blz. 244-291.
- WAGNER, E., 1965, *Untersuchungen über die Kostenabhängigkeit der Geldnachfrage*, Ein dynamisches Programmierungsmodell für die Kassenhaltung (Duncker und Humbolt, Berlin).

- WAGNER, H.M., 1975, Principles of Operations Research with applications to managerial decisions (Prentice-Hall Int. Inc., Englewood Cliffs, N.J.).
- WAGNER, H.M., M. O'HAGAN en B. LUNDH, 1965, An empirical study of exactly and approximately optimal inventory policies, Management Science 11, blz. 690-723.
- WEITZMANN, M., 1968, A model of the demand for money by firms, Quarterly Journal of Economics 82, blz. 161-164.
- WESTON, J.F. en E.F. BRIGHAM, 1981, Managerial Finance (Holt-Saunders, International Edition), blz. 351-355.
- WHALEN, E.L., 1968, An extension of the Baumol-Tobin approach to the transactions demand for cash, Journal of Finance 23, blz. 113-134.
- WRIGHTSMAN, D. en J. TERNINKO, 1971, On the measurement of opportunity cost in transactions demand models, Journal of Finance 26, blz. 947-950.

SUMMARY

In financial as well as in operations research literature a lot of attention has been paid to the optimal allocation of the available liquid resources to the existing alternatives given the future net expenses, the cost parameters and the constraints. The most important results from this literature are discussed in chapter one emphasizing the manner in which the relevant variables are modelled and solution techniques are used. After this survey we mainly direct our attention to the discrete stochastic cash balance problem. This problem is defined as the optimal allocation in time of the available liquid resources to cash and marketable securities given one credit facility, the holding costs, the transaction costs and the probability distributions of the future net expenses.

The cash balance problem is approached in three different ways. First we discuss and evaluate the results from the literature. Then we investigate the possibilities for approximating the optimal decision rule using results from operations research. Finally we develop simple formulas for approximating the optimal policy parameters.

A characteristic property of the discrete stochastic cash balance problem is that the decision maker has three alternatives at his disposal:

- a) decreasing the cash balance by buying marketable securities;
- b) increasing the cash balance by selling marketable securities;
- c) maintaining the cash balance.

A policy is optimal if a transaction is made if the reduction in expected costs exceeds the transaction costs. The values of the cash balance at which the costs of the transaction equal the maximum possible reduction in expected costs are called the control limits. The values of the cash balance at which the maximum reduction in the expected costs is achieved are called the return points. Based on the results from inventory theory in which the optimal policy can be described completely by two policy parameters, the reorder point and the reorder level, a lot of

cash balance literature has been concerned with the conditions with which it is possible to characterize the optimal policy completely by four policy parameters: the upper control limit, the upper return point, the lower return point and the lower control limit. The results of this research are discussed in chapter two, demonstrating that mathematical methods are useful for clarifying the problem.

In chapter three we evaluate the available solution procedures for determining the optimal policy and we also calculate the optimal policy, assuming that in each period the net expenses are independent, identical and normally distributed. Using three results and some proportionality properties, it is demonstrated that the optimal policy can be described completely with the four policy parameters mentioned. However, the computational burden necessary to calculate the optimal policy with the available methods for linear and dynamic programming is still too substantial for practical purposes. Therefore, using suitable methods from operations research, the study is directed to the development of decision rules with simply to calculate policy parameters. The methods chosen are discussed in chapter four, and the extensions and applications in chapter five, six and seven.

In chapter five the available approximations from inventory theory are investigated. It appears that after an adjustment the method developed by Wagner, O'Hagan and Lundh (1965) for approximating the optimal policy parameters of the inventory problem is also useful for the cash balance problem if particular conditions to the problem parameters are met.

In chapter six, the linear decision rule for a non-quadratic criterion function developed by Schneeweiss (1977), which is a good alternative if there are only proportional transaction costs and expected net expenses are zero, is discussed and extended in such a manner that fairly good results will be obtained if expected net expenses are unequal to zero and there are fixed and/or proportional transaction costs.

Constantinides (1976) derived closed form expressions for the optimal policy parameters of the continuous cash balance problem under particular conditions to the problem parameters. In chapter seven we show that it is possible to derive closed form expressions for the optimal policy parameters for all the relevant problem parameters if control is continuous and expected net expenses are equal to zero. Moreover, it is shown that the resulting policy parameters are useful for approximating the

optimal policy parameters of the discrete cash balance problem.

However, the method used in chapter seven is not suitable if expected net expenses are not zero. Therefore, we develop approximations for the optimal policy parameters when expected net expenses are not zero in chapter eight.

For these developments we use the relations between the optimal policy parameters and the problem parameters obtained in chapter three and the results from the chapters five, six and seven. In chapter eight we also show that if the developed approximations are used the expected costs per period will in most cases hardly differ from the minimal expected costs if the optimal policy parameters are used.

STELLINGEN

behorend bij het proefschrift van P. Slangen:
'Strategische Liquiditeitsmodellen'.

1. De optimale beleidsparameters van het strategische liquiditeitsprobleem zijn op een complexe wijze afhankelijk van de probleemparameters. Toch is het mogelijk om eenvoudig berekenbare benaderingsformules voor de beleidsparameters te construeren, die bij toepassing tot nauwelijks hogere verwachte kosten leiden dan de optimale beleidsparameters.
2. De door Inderfurth (1977, blz. 85) genoemde noodzakelijke voorwaarde, waaraan de optimale beleidsparameters van de lineaire beslissingsregel moeten voldoen, is onvolledig (Inderfurth, K., 1977, Zur Gute Linearen Entscheidungsregeln in Produktions-Lagerkaltungs-Modellen).
3. De door Frenkel en Jovanovic ontworpen benaderingsformule voor de optimale transactie- en voorrangsvraag naar geld voldoet niet aan de noodzakelijke proportionaliteitseigenschappen en dient daarom gecorrigeerd te worden (Frenkel, J.A. en B. Jovanovic, 1980, On transactions and precautionary demand for money, Quarterly Journal of Economics 95, 25-43).
4. Bij de constructie van financiële planningsmodellen wordt vaak voorgesteld om te werken met perioden van ongelijke lengte. Het is niet voor de hand liggend dat dit voorstel meer problemen oplost dan oproept.
5. De mogelijkheden die door de theorie van de "non synergistic conglomerate merger" geboden worden voor het evalueren van investeringsprojecten, krijgen onvoldoende aandacht in de financiële literatuur.
6. Met de huidige te grote concentratie in de financiële literatuur op een beperkt aantal problemen is noch de theorie noch de praktijk gediend.
7. De term "voorwaardelijke financiering" suggereert ten onrechte dat aan de financiering van andere vormen van wetenschappelijk onderzoek geen duidelijke voorwaarden gesteld worden.
8. Door het niet opnemen van het vak bedrijfseconometrie in de rompfaculteit van de studierichting der econometrie sluit het disciplineadvies economie, econometrie en actuariële wetenschappen onvoldoende aan bij de maatschappelijke ontwikkelingen.
9. Appendices dienen niet verwijderd doch gelezen te worden.

Bibliotheek K. U. Brabant



17 000 01122370 9